

INFRAROTVERHALTEN
EINER ULTRAVIOLETT-ENDLICHEN QUANTENFELDTHEORIE
AUF NICHTKOMMUTATIVER RAUMZEIT

Marcel Kossow
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

DIPLOMARBEIT

November 2004

Gutachter der Diplomarbeit: Prof. Dr. Klaus Fredenhagen
Prof. Dr. Gerhard Mack

Abstract

In this diploma thesis a model of an ultraviolet finite perturbation theory for massive spin-zero fields on the noncommutative Minkowski space is discussed.

A regularised interaction is introduced by defining a generalization of the limit of coinciding events on the noncommutative Minkowski space. This generalization is the so-called quantum diagonal map. It is shown (in momentum space) that the resulting formal Dyson series is finite term by term.

Graph theory is discussed and the corresponding Feynman rules are given. It turns out that the vacuum expectation value and special graphs diverge in the adiabatic limit. For that reason a renormalisation is required. Using time independent perturbation theory an energy correction is computed which leads to a finite mass correction. Here the correction of the energy preserves rotation and translation invariance but not Lorentz invariance and this leads to a distortion of the dispersion relation. As a result, the asymptotic behavior for large momenta differs from a Lorentz invariant theory. In the limit where the noncommutativity vanishes the common quantum field theory on the ordinary Minkowski space is reobtained.

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird ein Modell einer ultraviolett-endlichen Störungstheorie für massive Spin-Null-Felder auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum diskutiert.

Durch die Definition einer Verallgemeinerung des Limes zusammenfallender Ereignisse auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum, wird eine regularisierte Wechselwirkung eingeführt. Diese Verallgemeinerung ist die sogenannte Quanten-Diagonal-Abbildung. Es wird gezeigt (im Impulsraum), dass die resultierende formale Dysonreihe in jedem Term endlich ist.

Die Graphentheorie wird besprochen und Feynmanregeln angegeben. Es zeigt sich, dass im adiabatischen Limes der Vakuumerwartungswert und einige spezielle Graphen divergieren. Das macht eine Renormierung notwendig. Mittels zeitunabhängiger Störungstheorie wird dann eine Energiekorrektur berechnet, die zu einer endlichen Massenkorrektur führt. Die Energiekorrektur ist hierbei translations- und rotationsinvariant, nicht aber lorentzinvariant, und dies führt zu einer Verzerrung der Dispersionsrelation. Das asymptotische Verhalten für große Impulse weicht hierbei von einer lorentzinvarianten Theorie ab. Im Limes, in dem die Nichtkommutativität verschwindet, erhält man die herkömmliche Quantenfeldtheorie auf dem gewöhnlichen Minkowskiraum zurück.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Quantenfeldtheorie auf nichtkommutativer Raumzeit	5
1.1 Der nichtkommutative Minkowskiraum	5
1.2 Verallgemeinerte Weyl-Symbole	8
1.3 Zustände idealer Lokalisierung	9
1.4 Freie Felder	11
2 Ultraviolett-endliche Störungstheorie	15
2.1 Neue Koordinaten für minimale Abstände	15
2.2 Simultane Lokalisierung n -übereinstimmender Ereignisse	20
2.3 Wechselwirkung im Hamilton-Formalismus	24
2.4 Endliche S -Matrixelemente	29
2.5 Graphentheorie für gemittelte Ereignisse	38
3 Infrarotverhalten der effektiven Theorie	43
3.1 Renormierung der effektiven Theorie	46
3.1.1 Zeitunabhängige Störungstheorie	50
4 Zusammenfassung und Ausblick	63
A Einfache Graphen der effektiven Theorie	65
A.1 Der erste Selbstenergiebeitrag der $\phi_R^{(4)}$ -Theorie	65
A.2 Der erste Selbstenergiebeitrag der $\phi_R^{(3)}$ -Theorie	70
A.3 Der einfachste Graph ohne innere Linien in der $\phi_R^{(3)}$ -Theorie	71
B Beitrag zur Selbstenergie aus quantenmechanischer Sicht	75
B.1 Die Vakuumkorrektur	75
B.2 Die Einteilchenkorrektur	77
C Gewöhnliche ϕ^n-Theorie	83

Einleitung

Die Entwicklung einer nichtkommutativen Raumzeit begann bereits in den Anfängen der Quantenfeldtheorie. Ende der 1930er betrachtete Heisenberg in einem Brief an Peierls [1] die Möglichkeit Unschärferelationen für die Raumzeitkoordinaten einzuführen, um die Singularitäten der Elektron-Selbstenergie zu vermeiden. Die erste Veröffentlichung zu diesem Thema machte dann 1947 H. S. Snyder [2], ein Student von Oppenheimer. Sein Ansatz war, die gewöhnlichen Koordinaten durch nicht miteinander kommutierende Operatoren zu ersetzen, um die Divergenzen der Punktwechselwirkungen in der Quantenfeldtheorie zu vermeiden. Die erfolgreiche Entwicklung einer systematischen Renormierung zur Beseitigung der unerwünschten Divergenzen überschattete dann diese Ideen für einige Zeit. Das Interesse an Quantenfeldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit wuchs erst dann wieder, als man versuchte, die allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenfeldtheorie zu vereinen. Verstärktes Interesse kommt schließlich aus der String-Theorie. Dort fand man in gewissen Niederenergie-Limiten Feldtheorien auf nichtkommutativen Räumen, z.B. im Kontext von offenen Strings auf sogenannten D -Branes mit konstantem magnetischem Hintergrundfeld [3].

Die Ansätze, die unserem Modell zugrunde liegen, sind durch eine semiklassischen Betrachtung motiviert [4]. Die Konkurrenz der Prinzipien der Quantenmechanik und der allgemeinen Relativitätstheorie führen zu Raumzeit-Unschärfen und der natürliche geometrische Hintergrund, der diese Unschärfen implementiert, ist ein nichtkommutatives Modell einer Raumzeit. Diesen Sachverhalt betrachten wir nun etwas genauer mit einem Gedankenexperiment.

Wir wollen versuchen ein Ereignis zu einer festen Zeit in einem sphärisch symmetrischen Gebiet um einen Punkt im Raum mit der Genauigkeit a zu lokalisieren. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation muss der mit der Lokalisierung verbundene Energietransfer von der Größenordnung $E \approx \hbar c G/a$ sein, wobei G die Gravitationskonstante ist. Wollen wir das räumliche Gebiet beliebig genau auflösen, so geraten wir schnell in Konflikt mit der allgemeinen Relativitätstheorie. Diese besagt dann, dass sich bei der Planckenergie $E_P \approx \hbar c G/\lambda_P$ ein Gravitationsfeld mit Schwarzschildradius $R \approx \lambda_P$ bildet. Die Plancklänge $\lambda_P \approx 1.6 \cdot 10^{-35} m$ trägt hier die Bedeutung der Comptonwellenlänge eines Teilchens und steht gleichzeitig für den Schwarzschildradius z.B. eines schwarzen Loches. Es bildet sich somit ein Horizont, der jeglichen Informationsaustausch zwischen dem betreffenden Gebiet und dem Beobachter verhindert.

Wenn wir jedoch ein Ereignis nur in einer räumlichen Koordinate lokalisieren und zulassen, dass die anderen Richtungen beliebig unscharf werden können, so wird sich das Energiequant

E in einer dünnen Scheibe L ausdehnen können und das generierte Gravitationspotential würde für $L \rightarrow \infty$ überall verschwinden [5].

Dieses Gedankenexperiment motiviert auf unserer Raumzeit Unschärferelationen zwischen den Koordinaten einzuführen [4]:

$$\Delta x_0(\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_3) \gtrsim \lambda_{\mathbf{P}}^2,$$

$$\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_2 \Delta x_3 + \Delta x_3 \Delta x_1 \gtrsim \lambda_{\mathbf{P}}^2 \quad .$$

Wir sind nun zum einen daran interessiert Quantenfeldtheorien zu formulieren. Deshalb sollte unsere Raumzeit die Poincarésymmetrie erhalten, damit wir Wigners Beschreibung von Teilchen als irreduzible Darstellungen der Poincarégruppe übernehmen können. Zum anderen liegt es nahe, dass sich unsere Raumzeit für große Skalen wie eine (flache) pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit (z.B. Minkowskiraum) verhalten sollte.

Diese Einschränkungen an unsere Raumzeit können dadurch erfüllt werden, dass man zwischen den Koordinaten Vertauschungsrelationen fordert. Das heißt, wir ersetzen die Koordinaten durch unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren die

$$[q^\mu, q^\nu] = i\lambda_{\mathbf{P}}^2 Q^{\mu\nu}$$

erfüllen. Der Kommutator verhält sich hierbei wie ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe unter der Lorentztransformation.

Die Formulierung einer Quantenfeldtheorie auf nichtkommutativer Raumzeit, die frei von jeglichen Divergenzen ist, ist bis heute nicht vollständig gelungen. Zu den bekannten Ultraviolett- und Infrarot-Divergenzen (siehe z.B. [6]) sind sogar neue, gemischte UV/IR-Divergenzen hinzu gekommen [7]. Nach wie vor ist dabei nicht vollständig geklärt, ob und wie man diese Theorien renormieren kann. Erste Schritte zu einer systematischen Renormierung in einem Yang-Feldman-Formalismus auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum sind allerdings unternommen worden [8]. Desweiteren ist in einem anderen Ansatz einer euklidischen nichtkommutativen Raumzeit die Renormierung für eine skalare ϕ^4 -Theorie zu allen Ordnungen gelungen [9]. Leider ist bisher nicht klar, ob man den nichtkommutativen Minkowskiraum euklidisieren kann, um diesen Formalismus zu adaptieren.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem speziellen Modell einer skalaren Quantenfeldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum, welches in den Arbeiten [10],[11] und [12] publiziert ist. Mit einer verallgemeinerten Version des Wickproduktes im Limes zusammenfallender Ereignisse ist es möglich, eine regularisierte Wechselwirkung zu definieren. Die grundlegende Idee in diesem Modell ist, dass man die Differenzen der Koordinaten $q_j - q_k$ durch Zustände minimaler Unschärfe in der Raumzeit ideal lokalisiert, da sie nicht Null gesetzt werden können. Diese Prozedur führt jedoch unweigerlich zur Verletzung der Lorentzsymmetrie, wir werden aber sehen, dass die Rotations- und Translationssymmetrie in diesem Rahmen erhalten bleibt. Im Hamilton-Formalismus kann dann, durch die Einführung einer Abschneidefunktion, eine formale, unitäre S -Matrix konstruiert werden, deren Störungsentwicklung in jedem Term ultraviolett-endlich ist. Durch die ideale Lokalisierung der Differenzen der Quantenkoordinaten tauchen in den einzelnen Termen Gaußkerne auf, die mit der Plancklänge abfallen.

Die Motivation dieser Arbeit ist nun das Infrarotregime dieses Modells genauer zu studieren. Uns beschäftigt somit die Frage, ob der adiabatische Limes, bei dem die Abschneidefunktion konstant wird, existiert. Um diesen Limes anhand verschiedener Prozesse (Graphen) untersuchen zu können, werden die Feynmanregeln [13] für dieses Modell angegeben. Es zeigt sich, dass bestimmte Graphen divergieren und mit der Diskussion der Renormierung knüpfen wir an [11] an.

Diese Diplomarbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 1 werden die Grundlagen aus [4] für die Konstruktion einer Quantenfeldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum erläutert. Zunächst wird der nichtkommutative Minkowskiraum als eine nichtkommutative C^* -Algebra eingeführt und eine spezielle Darstellung der Elemente, die verallgemeinerten Weyl-Symbole, definiert. Im Anschluss daran wird kurz erklärt, was Zustände idealer Lokalisierung bedeuten und schließlich werden die freien, massiven Spin-Null-Felder auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum angegeben.

Darauf aufbauend wird in Kapitel 2 das Modell einer effektiven ultraviolett-endlichen Störungstheorie vorgestellt [10]. Zunächst definieren wir die Quanten-Diagonal-Abbildung, die den Limes zusammenfallender Ereignisse verallgemeinert. Im Anschluss daran wird daraus eine reguläre Wechselwirkung konstruiert, bei der die Dysonsche Störungstheorie zu einer unitären formalen S -Matrix führt. Diese ist in jedem Term ultraviolett-endlich und der in Abschnitt 2.4 angegebene Beweis vervollständigt (im Impulsraum) den Beweis aus [10]. Zuletzt wird die Graphentheorie besprochen und Feynmanregeln für diese Theorie aufgestellt [13].

In Kapitel 3 diskutieren wir das Infrarotverhalten der effektiven Theorie [11] und veranschaulichen dies anhand einfacher Graphen, die im Anhang berechnet werden. Das Verhalten der Theorie im adiabatischen Limes motiviert eine Renormierung und es wird die Massenrenormierung in diesem Rahmen diskutiert. Es zeigt sich, dass die herkömmlichen Methoden zur Renormierung hier nicht mehr funktionieren und es wird dann mit Hilfe der zeitunabhängigen Störungstheorie eine Energiekorrektur in zweiter Ordnung berechnet. Letztlich werden die daraus abgeleitete Massenkorrektur und die Gruppengeschwindigkeit analytisch, sowie numerisch abgehandelt.

Im letzten Kapitel schließen wir diese Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick.

Kapitel 1

Quantenfeldtheorie auf nichtkommutativer Raumzeit

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Begriffe und Konventionen aus [4] eingeführt, die für die Beschreibung einer Quantenfeldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum notwendig sind. Desweiteren wird kurz erläutert, in welchem Zusammenhang Zustände mit Lokalisierung stehen. Im darauffolgenden Kapitel werden dann diese Methoden und Begriffe aufgegriffen, um eine ultraviolett-endliche, effektive Quantenfeldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum, der sogenannten Quanten-Raumzeit, zu konstruieren.

1.1 Der nichtkommutative Minkowskiraum

Dieser Abschnitt soll die nichtkommutative Raumzeit $\mathcal{E}$ als eine nichtkommutative C^* -Algebra in vereinfachter Form vorstellen. Ausgangspunkt sind die stetigen, komplexen Funktionen $\mathcal{C}_0(M)$ auf einer kommutativen Mannigfaltigkeit M (z.B. Minkowskiraum), die im Unendlichen verschwinden. Diese bilden mit dem punktweisen Produkt und der Supremumsnorm zunächst eine nichtunitale Banach-Algebra. Die komplexe Konjugation induziert dann eine Involution, von der man zeigen kann, dass sie die C^* -Eigenschaft erfüllt. Somit haben wir eine nichtunitale kommutative C^* -Algebra. Die reinen Zustände auf dieser Algebra entsprechen nun gerade den Punkten der kommutativen Mannigfaltigkeit.

Die Idee ist, dass man diese kommutative C^* -Algebra durch eine nichtkommutative C^* -Algebra $\mathcal{E}(M)$ ersetzt. Die reinen Zustände auf dieser Algebra betrachtet man dann als das nichtkommutative Analogon zu den Punkten einer kommutativen Mannigfaltigkeit und die Elemente der nichtkommutativen Algebra als das nichtkommutative Analogon zu den Funktionen. Es sei darauf hingewiesen, dass durch die Nichtkommutativität und die Beschreibung der Raumzeit durch Zustände auf einer Algebra, die Vorstellung einer Raumzeit als Mannigfaltigkeit mit Punkten und stetigen Kurven keinen Sinn mehr ergibt. Das wird noch im Zusammenhang mit den Zuständen genauer erläutert. Wenden wir uns zunächst einer Präzisierung des nichtkommutativen Minkowskiraumes zu.

Als Ansatz wählt man die gewöhnlichen Koordinaten des kommutativen Minkowskiraumes x^μ und ersetzt diese durch selbstadjungierte, unbeschränkte Operatoren q^μ , die nicht

6 KAPITEL 1. QUANTENFELDTHEORIE AUF NICHTKOMMUTATIVER RAUMZEIT

miteinander kommutieren. Die Quanten-Koordinaten sollen die sogenannten Quantenbedingungen erfüllen:

$$[q^\mu, q^\nu] = i\lambda_{\mathbf{P}}^2 Q^{\mu\nu} \quad (1.1.1)$$

$$[q^\mu, Q^{\nu\rho}] = 0 \quad (1.1.2)$$

$$Q_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$(\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} q_\mu q_\nu q_\lambda q_\rho)^2 = \left(\frac{1}{2} Q_{\mu\nu} (*Q)^{\mu\nu}\right)^2 = \lambda_{\mathbf{P}}^8 \mathbb{1} \quad (1.1.4)$$

wobei $(*Q)^{\mu\nu} = 1/2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Q_{\lambda\rho}$ das Hodgedual von $Q^{\mu\nu}$ ist. Wir wollen nun die Bedeutung des Kommutators genauer untersuchen und betrachten das gemeinsame Spektrum der $Q^{\mu\nu}$. Dazu führen wir die (abstrakten) elektrischen und magnetischen Komponenten $\mathbf{E}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ von Q ein, die durch $E_i = Q_{0i}$ und $M_i = 1/2 \epsilon_{ijk} Q_{jk}$ gegeben sind. Die Bedingungen (1.1.3) und (1.1.4) schreiben sich damit als $\mathbf{E}^2 - \mathbf{M}^2 = 0$ und $1/2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}) = \pm 1$ ($\lambda_{\mathbf{P}} \equiv 1$). Das Spektrum ist damit gegeben durch $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$. Hierbei wird gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \Sigma_{\pm} &= \{(\sigma_{\mu\nu}) | \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}, \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 0 \text{ und } 1/8 \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_{\lambda\rho} = \pm 1\} \\ &= \{(\sigma_{\mu\nu}) | e_i = \sigma_{0i}, m_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}, \mathbf{e}^2 - \mathbf{m}^2 = 0 \text{ und } 1/2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}) = \pm 1\} \end{aligned}$$

jeweils homöomorph zu $\Sigma_-, \Sigma_+ \sim TS^2$ ist, dem Tangentialbündel der Zwei-Sphäre. $\Sigma_{\pm}$ sind also jeweils zusammenhängende, nichtkompakte, topologische Mannigfaltigkeiten, sogar homogene Räume auf denen die orthochrone Lorentzgruppe $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}(\mathbb{R}^{3,1})$ durch $\sigma \rightarrow \Lambda \sigma \Lambda^t$ transitiv wirkt.

In der Konstruktion einer effektiven Theorie wird der Umstand wichtig werden, dass man auf Σ eine euklidische Norm definieren kann (eingebettet in einen linearen Raum):

$$\|\sigma\|^2 := \frac{1}{2} \sum_{\mu < \nu} \sigma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{m}^2) = \mathbf{e}^2 = \mathbf{m}^2 \quad .$$

Es gilt dann $\|\sigma\| \geq 1$ für alle $\sigma \in \Sigma$. Der Fall $\|\sigma\| = 1$ ist besonders ausgezeichnet¹. Die Zustände können hier so gewählt werden, dass sie die Quanten-Koordinaten ideal lokalisiert werden, das heißt die Unschärferelationen optimieren (vergleiche nächsten Abschnitt):

$$\Delta q_0 (\Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3) = \lambda_{\mathbf{P}}^2 \quad \text{und} \quad \Delta q_1 \Delta q_2 + \Delta q_1 \Delta q_3 + \Delta q_2 \Delta q_3 = \lambda_{\mathbf{P}}^2$$

Die Bedingung $\|\sigma\| = 1$ legt aus topologischer Sicht auf $\Sigma_{\pm}$ eine Untermannigfaltigkeit $\Sigma_{\pm}^{(1)} = \{\sigma | \|\sigma\| = 1 \text{ bzw. } |\mathbf{m}| = 1\}$ fest, welche homöomorph zur Zwei-Sphäre $S^2 \sim \Sigma^{(1)}$ ist [4]. $\Sigma^{(1)}$ ist nun der Orbit der orthogonalen Gruppe und Σ der Orbit der Lorentzgruppe, angewandt auf

$$(\sigma_0^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

¹Hier sind die Zustände minimaler Unschärfe lokalisiert, denn es gilt [4, Proposition 3.4]:

$$\sum_{\mu} (\Delta_{\omega} q^{\mu})^2 \geq \sqrt{2} \int d\mu_{\omega}(\sigma) \sqrt{1 + \|\sigma\|^2} \quad ,$$

wobei μ_{ω} das Spektralmaß des Zustandes ω ist.

Setzt man diese Matrix in (1.1.1) ein, so bekommt man die Vertauschungsrelationen des vierdimensionalen quantenmechanischen Phasenraums. Wir können deshalb in die Schrödinger-Darstellung übergehen und die q^μ an der Stelle σ_0 ersetzen durch

$$q_{\sigma_0}^0 := P^1, \quad q_{\sigma_0}^1 := P^2, \quad q_{\sigma_0}^2 := Q^1, \quad q_{\sigma_0}^3 := Q^2$$

den Orts- und Impuls-Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{\sigma_0} := L^2(\mathbb{R}^2)$

Will man Funktionen der Quanten-Koordinaten definieren, so findet man das gleiche Problem vor, welches bereits aus der Quantenmechanik bekannt ist. Dort sind Impuls- und Orts-Operatoren unbeschränkt (siehe z.B. [14]). Ebenfalls sind die q^μ unbeschränkte Operatoren und man bekommt Probleme mit den Definitionsbereichen. Es zeigt sich, dass keine Norm auf der von den unbeschränkten Operatoren erzeugten Algebra existiert, die $\|q^\mu q^\nu\| \leq \|q^\mu\| \|q^\nu\|$ erfüllt. Statt der Quanten-Koordinaten definieren wir deshalb die Weyl-Operatoren $W(k) := \exp\{ik_\mu q^\mu\}$ wobei $k_\mu \in \mathbb{R}$ ist. Diese sind beschränkte Operatoren (stetige unitäre Einparameter-Gruppen) und wir fordern damit die stärkeren Weyl-Relationen, die (1.1.1) ersetzen:

$$e^{ik_\mu q^\mu} e^{ih_\nu q^\nu} = e^{-\frac{i}{2}k_\mu Q^{\mu\nu} h_\nu} e^{i(k_\mu + h_\mu)q^\mu}$$

Hierbei ist wichtig, dass die $Q^{\mu\nu}$ untereinander und mit den q^μ vertauschen. Mit dieser Bedingung ist bereits das Multiplikationsgesetz und damit die Weyl-Algebra festgelegt. Wir folgen dem von Neumannschen Zugang zur Quantentheorie [15, VIII] und definieren zunächst $\mathcal{E}_0$ als eine Banach-*-Algebra $\mathcal{C}_0(\Sigma, L^1(\mathbb{R}^4))$, der stetigen Funktionen von $\Sigma \rightarrow L^1(\mathbb{R}^4)$, die im Unendlichen verschwinden. Der von Neumannsche Eindeutigkeitssatz² besagt dann, dass bis auf unitäre Äquivalenz und Multiplikation mit einem Faktor die Schrödinger-Darstellung die eindeutige und einzige Lösung der Weyl-Relationen ist. Man spricht hierbei auch von einer regulären Darstellung der Weyl-Algebra. Wir betrachten zunächst die Funktionen:

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \check{f}(k) e^{ik_\mu q^\mu}$$

mit $\check{f}(k) \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^4)$, wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation bedeutet. Da die $Q^{\mu\nu}$ miteinander und mit den q^μ kommutieren, kann man dies erweitern und folgendes definieren:

$$f(Q, q) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \check{f}(Q, k) e^{ik_\mu q^\mu}.$$

Dadurch wird dann ein (in Σ punktweises) Produkt festgelegt:

$$\begin{aligned} (f(Q, q)g(Q, q))|_{Q=\sigma} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4h d^4k \check{f}(Q, k) \check{g}(Q, h)|_{Q=\sigma} e^{ik_\mu q^\mu} e^{ih_\nu q^\nu} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4h d^4k \check{f}(Q, k) \check{g}(Q, h)|_{Q=\sigma} e^{-\frac{i}{2}k_\mu Q^{\mu\nu} h_\nu} e^{i(h_\mu + k_\mu)q^\mu}, \end{aligned}$$

²[15, Theorem VIII.14]. Jedes irreduzible Weylsystem mit einer endlichen Zahl N an Freiheitsgraden ist unitär äquivalent zur Schrödinger-Darstellung. Ist ein solches System jedoch reduzibel, so ist es eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen und damit ein Vielfaches der Schrödinger-Darstellung.

eine Involution

$$f(Q, q)^* = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \overline{\check{f}(Q, k)} e^{-ik_\mu q^\mu} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \overline{\check{f}(Q, -k)} e^{ik_\mu q^\mu} ,$$

und eine Norm:

$$\|f\|_{0,1} := \sup_{\sigma} \int d^4k |\check{f}(\sigma, k)| = \sup_{\sigma} \|\check{f}(\sigma, \cdot)\|_1 .$$

Damit ist die C^* -Algebra $\mathcal{E}_0$ bestimmt. In [4, Theorem 4.1] zeigt sich, dass der Abschluss von $\mathcal{E}_0$ isomorph zu $\mathcal{C}_0(\Sigma, \mathcal{K})$ ist, wobei $\mathcal{K}$ die C^* -Algebra der kompakten Operatoren auf einem unendlichdimensionalen Hilbertraum darstellt. Dieser Abschluss ist das Analogon zu $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^4)$ auf dem kommutativen Minkowskiraum und wird mit $\mathcal{E}$ als nichtkommutativer Minkowskiraum bezeichnet. $\mathcal{E}$ ist nun eine nichtunitale, nichtkommutative C^* -Algebra, besitzt jedoch kein Zentrum, d.h. $Q^{\mu\nu} \notin \mathcal{E}$. Wir erweitern deshalb die Algebra zur Multiplikator-Algebra³ $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ mit Zentrum $\mathcal{Z}$, die den Kommutator und die Einsfunktion enthält. Aufgrund der Kommutatoren ist das Zentrum nicht trivial, besteht also nicht nur aus dem Vielfachen der Eins⁴. Nun besagt der Satz von Gelfand Naimark [16], dass jede kommutative C^* -Algebra $\mathfrak{A}$ durch einen isometrischen $*$ -Isomorphismus, die Gelfandtransformation, auf die stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen $\mathcal{C}_0(M(\mathfrak{A}))$ abgebildet werden kann. $M(\mathfrak{A})$ ist hierbei ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, das sogenannte Gelfandspektrum der Algebra $\mathfrak{A}$. Die Folge ist, dass die Algebra, die von den $Q^{\mu\nu}$ erzeugt wird, mit der Algebra $\mathcal{C}_0(\Sigma)$, den stetigen im Unendlichen verschwindenden Funktionen, identifiziert werden kann und Σ das gemeinsame (Gelfand-) Spektrum der $Q^{\mu\nu}$ bildet. Das Zentrum $\mathcal{Z} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ identifizieren wir deshalb mit $\mathcal{C}_b(\Sigma)$, den stetigen, beschränkten Funktionen. Wir haben somit $\mathcal{C}_0(\Sigma, \mathcal{K}) \simeq \mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ und für ein festes σ ist $\mathcal{E}_\sigma \simeq \mathcal{K}(\mathcal{H}_\sigma)$. Hierbei ist $\mathcal{H}_\sigma$ der unendlichdimensionale Hilbertraum an der Stelle σ . Die Menge $\mathcal{I}_\sigma := \{f \in \mathcal{E} | f(\sigma) = 0\}$ bildet ein beidseitiges, abgeschlossenes $*$ -Ideal in $\mathcal{E}$, wegen dem punktweisen Produkt auf Σ . Hierbei wird gezeigt, dass $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}/\mathcal{I}_\sigma$ wiederum eine C^* -Algebra ist.

1.2 Verallgemeinerte Weyl-Symbole

Das Zentrum $\mathcal{Z}$ wird im nächsten Kapitel eine wichtige Rolle spielen, insbesondere die regulären Darstellungen der Quanten-Koordinaten. Der Sachverhalt, dass die $Q^{\mu\nu}$ miteinander kommutieren, erlaubt nun, dass man eine besondere Darstellung der Operatoren wählen kann [4, Theorem 4.2]. Sei dazu $g \in \mathcal{C}_b(\Sigma)$ mit $g \mapsto g(Q)$ und $\check{f} \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^4)$ wie oben. Sei $\pi(\cdot)$ eine reguläre Darstellung von $g \otimes f$ im von Neumannschen Sinne. Die verallgemeinerte

³Sei $\mathfrak{A}$ eine C^* -Algebra ohne Eins (nichtunital). Dann existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige unitale C^* -Algebra, die ganz $\mathfrak{A}$ als ein wesentliches Ideal enthält. Diese Algebra ist maximal in dem Sinne, dass jede andere Algebra dieser Art in ihr eingebettet werden kann. Eine solche Algebra heißt Multiplikator-Algebra und wird mit $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ bezeichnet (siehe z.B. [16]).

⁴In diesem Zusammenhang spricht man davon, dass die $Q^{\mu\nu}$ zum Zentrum $\mathcal{Z}$ der Multiplikator-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ affin sind. Das ist eine mathematische Feinheit deren Details in [4, Anhang A] zu finden sind.

Weyl-Korrespondenz ist definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(g \otimes f) := \pi(g \otimes f) &= g(\pi(Q)) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \check{f}(k) e^{ikq} \\ &= g(Q) f(q)\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $g(\sigma)f(x)$ das Symbol von $\mathcal{W}(g \otimes f)$, wobei $\sigma \in \Sigma$ und $x \in \mathbb{R}^4$, also $f \in L^1(\mathbb{R}^4)$. Wir wollen nun die verallgemeinerte Weyl-Korrespondenz im Kontext der Symbole betrachten. Anstatt der Funktionen g und f definieren wir die Symbole $G, F \in \mathcal{C}_b(\Sigma \times \mathbb{R}^4)$ mit $\check{G}(\sigma, \cdot), \check{F}(\sigma, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^4)$. Das Darstellungsgesetz $\mathcal{W}(G \star F) = \mathcal{W}(G)\mathcal{W}(F)$ induziert dann ein Produkt an der Stelle σ auf dem Raum der Symbole:

$$(G \star F)(\sigma, \cdot) = G(\sigma, \cdot) \star_\sigma F(\sigma, \cdot)$$

Das Produkt nennt man auch das getwistete Produkt und es gilt:

$$(G(\sigma, \cdot) \star_\sigma F(\sigma, \cdot))(x) = \int \frac{d^4 k d^4 h}{(2\pi)^4} \check{G}(\sigma, k) \check{F}(\sigma, k) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \sigma^{\mu\nu} h_\nu} e^{i(k_\mu + h_\mu)x^\mu}$$

Die Bezeichnung ist durch den Twist-Faktor $e^{-\frac{i}{2} k_\mu \sigma^{\mu\nu} h_\nu}$ inspiriert. Da wir später Feldgleichungen benötigen, stellt sich nun die Frage, wie man Derivationen auf den Symbolen definieren kann. Auf dem kommutativen Minkowskiraum realisiert man dies mit den infinitesimalen Erzeugern der Raum-Zeit-Translationen. Ebenso verfahren wir im nichtkommutativen Fall. Betrachte dazu die Wirkung der Poincaré-Gruppe $\tau_{a,\Lambda}$, mit $a \in \mathbb{R}^4$ und $\Lambda \in \mathcal{L}$, auf die Symbole $F \in \mathcal{C}_0 \times \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$(\tau_{a,\Lambda} F)(\sigma, x) := F(\Lambda^{-1} \sigma \Lambda^{t-1}, \Lambda^{-1}(x - a)) \det \Lambda.$$

Hierbei ist $\det \Lambda = \pm 1$. Eine Derivation erhält man nun durch den Automorphismus $\tau_{a,1}$ der Raum-Zeit-Translationen folgendermaßen:

$$\partial_\mu F(Q, q) := -\frac{d}{da_\mu} \Big|_{a=0} (\tau_{a,1} F)(Q, q) = \frac{d}{da_\mu} \Big|_{a=0} F(Q, (q + a)) \quad (1.2.1)$$

1.3 Zustände idealer Lokalisierung

Die Grundannahmen der Quantentheorie bestehen darin, dass man Observablen durch hermitesche Elemente einer C^* -Algebra und Zustände durch positive, normierte, lineare Funktionale über dieser Algebra beschreibt. Die möglichen Messresultate bilden das Spektrum und das vom Spektrum induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß legt die Wahrscheinlichkeitsverteilung fest [14]. Ein Zustand über $\mathcal{E}$ ist somit definiert als ein lineares Funktional $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ mit $\omega : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\omega : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{C}$ und wir schreiben dafür $F \mapsto \omega(F(Q, q)) \equiv \langle \omega, F(Q, q) \rangle$. Ein solcher Zustand bestimmt nun die Lokalisierung eines Experiments auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum. Die Zustände müssen Werte in den komplexen Zahlen annehmen, deshalb beseitigen wir die $\mathcal{Z}$ -Abhängigkeit der Symbole mittels Integration über Σ . Es stellt sich dabei heraus, dass kein lorentzinvariantes Integrationsmaß (Haarsches Maß) in einem

Zustand gewählt werden kann, da die Lorentzgruppe nicht kompakt ist [4]. Die Lorentzsymmetrie wird somit gebrochen, sobald wir Zustände auf unserer Raumzeit $\mathcal{E}$ wählen. Die Wahl des Integrationsmaßes kann aber auf später verschoben werden, indem man $\mathcal{Z}$ -wertige Abbildungen ($\mathcal{Z}$ -wertige “Zustände”) $\zeta : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\Sigma)$ einführt im Sinne von:

$$\omega(F) = \int_{\Sigma} d\mu_{\sigma} (\zeta F)(\sigma) \quad ,$$

wobei $d\mu_{\sigma}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Σ ist. Wir wollen nun sehen, wie man mit den Zuständen die Unschärferelationen berechnen kann. Die Unschärfe Δ_{ω} ist für selbstadjungierte Operatoren $A \in \mathfrak{A}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert durch

$$(\Delta_{\omega} A)^2 = \omega((A - \omega(A) \cdot id_{\mathfrak{A}})^2) = \omega(A^2) - \omega(A)^2 \quad .$$

In [4] wird gezeigt, dass jeder Zustand ω im Definitionsbereich⁵ des Kommutators $[q^{\mu}, q^{\nu}]$ die Unschärferelationen

$$\Delta_{\omega} q_0 \sum_{j=1}^3 \Delta_{\omega} q_j \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{1 \leq j < k \leq 3} \Delta_{\omega} q_j \Delta_{\omega} q_k \geq \frac{1}{2}$$

erfüllen. Die Zustände, die ein Ereignis ideal in der Raumzeit $\mathcal{E}$ lokalisieren, betrachtet man als das Analogon zu den Punkten einer kommutativen Mannigfaltigkeit. Diese Zustände minimieren $\sum_{\mu} \Delta_{\omega} q^{\mu}$ und aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass dann der Kommutator Werte in $\Sigma^{(1)}$ annimmt. In [4] wird nun explizit gezeigt, dass der um den Punkt $a \in \mathbb{R}^4$ ideal lokalisierte Zustand gegeben ist durch

$$\omega_a(F) = \int_{\Sigma^{(1)}} d\mu_{\sigma} (\eta_a F)(\sigma) \quad ,$$

wobei $d\mu_{\sigma}$ jetzt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Sigma^{(1)}$ ist und die Abbildung $\eta_a : \mathcal{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma^{(1)})$ definiert ist durch:

$$\begin{aligned} (\eta_a F)(\sigma) &:= \int d^4 k \, \check{F}(\sigma, k) \, \langle \eta_a, e^{ik_{\mu} q^{\mu}} \rangle \\ &= \int d^4 k \, \check{F}(\sigma, k) \, e^{-\frac{1}{2}|k|^2} \, e^{ik_{\mu} a^{\mu}} \end{aligned}$$

Hierbei ist mit $|k|^2 = k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ das euklidische Skalarprodukt gemeint (im Gegensatz zu $k_{\mu} k^{\mu}$). Nun kann auf $\Sigma^{(1)}$ ein Haarsches Maß bezüglich der orthogonalen Gruppe gewählt werden, denn $\langle \eta_a, e^{ik_{\mu} q^{\mu}} \rangle$ ist eine konstante Funktion von $\sigma \in \Sigma^{(1)}$. Dabei bleibt Rotations- und Translationssymmetrie erhalten aber nicht die Lorentzsymmetrie.

Die reinen Zustände mit optimaler Lokalisierung führen dazu, dass die Summe der quadratischen Varianzen minimiert werden (siehe oben). Mit (1.1.5) haben wir:

$$(\Delta P^1)^2 + (\Delta P^2)^2 + (\Delta Q^1)^2 + (\Delta Q^2)^2 \geq 2$$

⁵Definition: Sei A ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Einheitsvektor $x \in \mathcal{H}$. Wir sagen ein Zustand ω ist im Definitionsbereich von $A \in \mathfrak{A}$, wenn $x \in \mathcal{D}_A$ ist, sodass $\omega(A^2) \equiv (Ax, Ax) < \infty$. Dasselbe gilt wenn A affin zu einer C^* -Algebra $\mathfrak{A}$ ist und $\omega \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$. (Vergleiche [4, Appendix A])

Das Minimum dieser Größe ist zwei und wird für den Grundzustand $|0\rangle$ des zweidimensionalen harmonischen Oszillators angenommen. Es gilt somit, dass

$$\langle \eta_a, e^{ik_\mu q^\mu} \rangle = \langle 0 | e^{ik_\mu q^\mu} | 0 \rangle e^{ik_\mu a^\mu} = e^{-\frac{1}{2}|k|^2} e^{ik_\mu a^\mu} \quad .$$

Die Koordinatenunschärfen sind hierbei gleich $1/\sqrt{2}$. Für eine detaillierte mathematische Darstellung sei auf [17] oder [18] verwiesen.

Für spätere Zwecke führen wir noch nützliche formale Abbildungen ein: wir können uns auf $\eta \equiv \eta_0$ beschränken und schreiben η als Komposition $\eta = \eta^{(1)} \circ \gamma$ aus der Einschränkung $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_1$, wobei die C^* -Algebra $\mathcal{E}_1 (\subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1))$ von den Einschränkungen der Symbole $\gamma F := F|_{\Sigma^{(1)}}$ auf $\Sigma^{(1)}$ erzeugt wird, und der Abbildung $\eta^{(1)} : \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma^{(1)})$. Im Folgenden ist mit $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}_1$ der Einfachheit halber auch immer deren Multiplikatoralgebra gemeint.

1.4 Freie Felder

Wir sind nun in der Lage, freie Felder auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum zu definieren. Ausgangspunkt ist die Definition von Wigner, bei der man Teilchen als irreduzible Darstellung der Überlagerungsgruppe der Poincarégruppe betrachtet. Die übliche Fockraum-Konstruktion liefert dann ein freies Feld, das man mit den sogenannten Wigner-Teilchen assoziiert. Die Felder werden formal betrachtet als Funktionen auf $\mathcal{E}$ mit Werten in der Algebra der Feldoperatoren auf dem symmetrischen Fockraum. Wir beschränken uns dabei auf die neutralen, skalaren freien Felder und definieren diese wie folgt (für eine genaue mathematische Definition sei auf [11] und [4] verwiesen):

$$\begin{aligned} \phi(q) &:= \int d^4 k \, \check{\phi}(k) \otimes e^{ik_\mu q^\mu} \\ &= \int \underbrace{\frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} 2\omega(\mathbf{k})}}_{=: d\Omega_m^+} [a(\mathbf{k}) \otimes e^{-ik_\mu q^\mu} + a^+(\mathbf{k}) \otimes e^{ik_\mu q^\mu}] \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Hierbei sind a und a^+ die aus der herkömmlichen Theorie bekannten Ab- und Aufsteigeoperatoren auf dem symmetrischen Fockraum $\mathfrak{H}$ mit $a(\mathbf{k}) \equiv a_{\mathbf{k}}$ und

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad ,$$

mit $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. $d\Omega_m^+$ ist das invariante Maß auf dem Massenschalenhyperboloid positiver Energie:

$$\Omega_m^+ := \{k \in \mathbb{R}^4 \mid k_\mu k^\mu = m^2, k_0 > 0\}$$

Der Einfachheit halber definieren wir hier die Felder ohne eine σ -Abhängigkeit.

In dieser Definition erfüllen die freien Felder die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square_q + m^2)\phi(q) = 0 \quad ,$$

wobei die Derivation im Sinne von (1.2.1) zu verstehen ist.

12KAPITEL 1. QUANTENFELDTHEORIE AUF NICHTKOMMUTATIVER RAUMZEIT

Auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum betrachtet wir (in diesem Modell) Zustände als das Analogon zu den Testfunktionen auf dem kommutativen Minkowskiraum. Sei nun $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ ein Zustand über $\mathcal{E}$. Man definiert die Testfunktion ψ_ω assoziiert zu ω durch:

$$\psi_\omega(x) := \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \omega(e^{ikq}) \quad (1.4.2)$$

und das freie Feld im Zustand ω durch:

$$\phi(\omega) := \langle I \otimes \omega, \phi(q) \rangle \quad (1.4.3)$$

Hierbei ist $x \in \mathbb{R}^4$. Wir verwenden folgende Kurzschreibweisen in dieser Arbeit: für das Minkowski-Skalarprodukt schreiben wir $kx := k_\mu x^\mu$ und für die Integrationsmaße

$$d\underline{x} \equiv dx_N \equiv dx_1 \dots dx_n \equiv d^4x_1 \dots d^4x_n \quad .$$

Die Feldoperatoren sind somit lineare Abbildungen $\omega \mapsto \phi(\omega)$ von dem Raum der Zustände $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ auf $\mathcal{E}$ in den Raum der mit Testfunktionen ψ verschmierten Operatoren, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \int dk \int \frac{da}{(2\pi)^4} \langle I, \phi(a) e^{-ika} \rangle \langle \omega, e^{ikq} \rangle \\ &= \int da \phi(a) \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{ika} \langle \omega, e^{ikq} \rangle \\ &= \int da \phi(a) \psi_\omega(a) \\ &= \langle \phi, \psi_\omega \rangle \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Diese Feldoperatoren sind auf dem normalen Fockraum der freien, skalaren Felder definiert $\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}^{(n)}$ mit Skalarprodukt $\langle \varphi | \varphi \rangle < \infty$. $\mathfrak{H}^{(n)}$ ist der n-Teilchenraum mit Wellenfunktionen $\varphi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}^{3n})$ und Skalarprodukt $\sum_n \langle \varphi^{(n)} | \varphi^{(n)} \rangle < \infty$. Der Vakuumzustand wird mit $|\Omega\rangle$ bezeichnet. Die Felder (1.4.1) können auch als quadratische Form auf dem (invarianten Formen-) Raum der glatten Wellenfunktionen $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$ betrachtet werden im Sinne von [15, X.]: $D_{\mathcal{S}} := \{\varphi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})\}$. Die uneigentlichen Eigenvektoren des Impulsoperators sind definiert durch:

$$|k_1 \dots k_n\rangle := (n!)^{-1/2} a_{\mathbf{k}_1}^+ \dots a_{\mathbf{k}_n}^+ |\Omega\rangle \quad .$$

Nun betrachten wir noch den Kommutator ausgewertet in Zuständen ω, ω' :

$$[\phi(\omega), \phi(\omega')] = i \int dadb \Delta(a-b) \psi_\omega(a) \psi_{\omega'}(b) = i \int dadb \Im \Delta_+(a-b) \psi_\omega(a) \psi_{\omega'}(b)$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{R}^{3,1}$ und $\Delta_+(a-b)$ der gewöhnliche Propagator aus der kommutativen Feldtheorie definiert durch die Zweipunktfunktion:

$$\langle \Omega | \phi(a) \phi(b) | \Omega \rangle = -i \Delta_+(a-b) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(a-b)}$$

Der Propagator kann durch die Besselfunktion $K(1, ima)$ zweiter Art und erster Ordnung ausgedrückt werden:

$$\Delta_+(a) = \frac{-im}{4\pi^2 a} K(1, ima)$$

Soweit haben wir nun die Grundlagen der Quantenfeldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum hinreichend besprochen und können uns jetzt der Konstruktion eines ultraviolett-endlichen Modells im nächsten Kapitel widmen.

Kapitel 2

Ultraviolett-endliche Störungstheorie auf quantisierter Raumzeit

Der folgende Abschnitt soll ein Modell einer skalaren Quantenfeldtheorie massiver Spin-Null-Felder auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum $\mathcal{E}$ vorstellen, mithilfe dessen sich eine effektive S -Matrix definieren lässt. Es zeigt sich dann, dass die so konstruierte (nichtlokale) S -Matrix unitär ist und dass keine Ultraviolettdivergenzen in den einzelnen Termen respektive Graphen auftreten, so lange der adiabatische Limes zumindest in der Zeit nicht durchgeführt wird. Durch diesen Ansatz wird die Lorentzinvarianz verletzt aber Rotations- und Translationsinvarianz bleiben erhalten. Im Limes $\lambda_{\mathbf{P}} \rightarrow 0$ erhält man aber die bekannte Quantenfeldtheorie auf dem normalen kommutativen Minkowskiraum zurück. Kernpunkt dieses Ansatzes ist die sogenannte Quanten-Diagonal-Abbildung, die die übliche Definition der Wickmonome [19] durch sogenannte reguläre Wickmonome ersetzt, was dann zu einer ultraviolett-endlichen Dyson-Reihe führt. Die Darstellung in diesem Kapitel richtet sich nach den Publikationen [10], [20] und natürlich [11],[12].

2.1 Neue Koordinaten für minimale Abstände

In der herkömmlichen Quantenfeldtheorie kann eine Wechselwirkung durch einen zusätzlichen Term z.B. $1/n! : \phi^n(x) :$ in der Lagrangedichte eingeschaltet werden. Die Doppelpunkte stehen hierbei für die Wickordnung (Normalordnung) bei der alle Erzeugungsoperatoren links von Vernichtungsoperatoren stehen. Diese ist notwendig, wenn man den Vakuumerwartungswert beziehungsweise Vakuumgraphen aus der Theorie eliminieren will. Das sogenannte Wickprodukt lässt sich definieren durch z.B $n = 2$:

$$:\phi^2(x): := \lim_{x \rightarrow y} [\phi(x)\phi(y) - \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle] \quad .$$

Das heißt man betrachtet den Limes, bei dem x und y zusammenfallen. Auf dem gewöhnlichen Minkowskiraum ist das bekanntlich keine Schwierigkeit. Auf dem nichtkommutativen

Minkowskiraum jedoch funktioniert dies aufgrund der Kommutatorrelationen (1.1.1) nicht mehr. Allerdings ist es möglich den (euklidischen) Abstand $\Sigma_\mu |q^\mu - q'^\mu|^2$ zu minimieren.

Betrachten wir dazu zunächst die Quantenmechanik. Wenn man z.B. zwei Teilchen an einem Ort im Phasenraum lokalisieren will, führt man zunächst Relativ- und Schwerpunktkoordinaten ein. Aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation ist dann sofort klar, dass bei scharf lokalisiertem Ort, z.B. der Relativkoordinate, die Impulse vollkommen delokalisiert sind. Nun ist es aber möglich Ort und Impuls in Zuständen minimaler Unschärfe auszuwerten, sodass der relative Abstand im Phasenraum minimiert wird. Der klassische Limes $(x, p_x) \rightarrow (y, p_y)$ wird somit, durch die Auswertung der Relativkoordinaten $(\hat{x}, \hat{p}_x) - (\hat{y}, \hat{p}_y)$ im Grundzustand, ersetzt.

Der Sachverhalt auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum ist nun ähnlich. Als Ansatz wählt man n Koordinaten, die untereinander kommutieren und definiert dann eine Abbildung, die diese Koordinaten in mittlere (Schwerpunkt) und relative Koordinaten transformiert. Darauf folgt die Auswertung im Grundzustand. Das soll im Folgenden präzisiert werden. Die kanonische Definition der miteinander kommutierenden (Quanten-)Koordinaten ist:

$$q_i^\mu := I \otimes \dots \otimes I \otimes \underbrace{q^\mu}_{i\text{-te Stelle}} \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad i = 1, \dots, n$$

und sind jeweils Elemente (als Exponenten) des n -fache Tensorproduktes $\mathcal{E} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}$ der Raumzeiten – genauer sind sie affiliert zu den tensorierten (Multiplikator-) Algebren. Betrachten wir nun die Differenz zweier Koordinaten $q_i - q_j$ (die Relativkoordinate), so stellen wir fest, dass die Komponenten nicht miteinander kommutieren $[q_i^\mu - q_j^\mu, q_i^\nu - q_j^\nu] \neq 0$. Die Differenz kann somit wegen den Unschärferelationen nicht Null werden.

Wir suchen nun Funktionen $f(q_1, q_2)$ deren Differenz man gegen Null gehen lassen kann. Dazu betrachten wir die Kommutatorfunktion. Behandeln wir zunächst den Fall für zwei Koordinaten $[q_1^\mu, q_1^\nu] - [q_2^\mu, q_2^\nu] = [q^\mu, q^\nu] \otimes I - I \otimes [q^\mu, q^\nu] \neq 0$. Aufgrund der Tatsache, dass wir hier das Tensorprodukt über die komplexen Zahlen genommen haben, verschwindet dieser Ausdruck nicht. Deshalb machen wir einen neuen Ansatz und nehmen das Tensorprodukt über das Zentrum der Multiplikator-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$:

$$[q_1^\mu, q_1^\nu] - [q_2^\mu, q_2^\nu] = \underbrace{[q^\mu, q^\nu]}_{\in \mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{Z}} I - I \otimes_{\mathcal{Z}} [q^\mu, q^\nu] = 0 \quad (2.1.1)$$

Hierbei benutzen wir $(I \otimes_{\mathcal{Z}} q^\mu)(q^\nu \otimes_{\mathcal{Z}} I) = q^\nu \otimes_{\mathcal{Z}} q^\mu$. Wir definieren also unsere Koordinaten neu:

$$q_i^\mu := I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \underbrace{q^\mu}_{i\text{-te Stelle}} \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \quad (2.1.2)$$

Es stellt sich nun heraus, dass auch diese neu definierten Koordinaten den kanonischen Kommutatorrelationen aus Kapitel 1 genügen:

$$\begin{aligned} [q_i^\mu, q_j^\nu] &= i\lambda_{\text{P}}^2 \delta_{ij} \mathcal{Q}^{\mu\nu} \\ [q_j^\nu, \mathcal{Q}^{\nu\rho}] &= 0 \\ \mathcal{Q}_{\mu\nu} \mathcal{Q}^{\mu\nu} &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\mu\nu} (* \mathcal{Q}^{\mu\nu}) \right)^2 &= I \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Wobei nun für $i = j$

$$\mathcal{Q}^{\mu\nu} := Q^{\mu\nu}(I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I)$$

ist, da $Q^{\mu\nu} \in \mathcal{Z}$. Im Folgenden setze wieder $\lambda_{\mathbb{P}}^2 \equiv 1$. Mit den gleichen Argumenten wie in Kapitel 1 gehen wir über zu den Weyloperatoren. Mit der Beziehung

$$\begin{aligned} e^{ik_{\mu}(I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} q^{\mu} \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ik_{\mu}(I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} q^{\mu} \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I))^n \\ &= I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ik_{\mu} q^{\mu})^n \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \\ &= I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} e^{ik_{\mu} q^{\mu}} \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \end{aligned}$$

lassen sich die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.1.3) in der stärkeren Bedingung definieren:

$$e^{ik_{i\mu} q_i^{\mu}} e^{ik_{j\nu} q_j^{\nu}} = e^{-\frac{i\delta_{ij}}{2} \mathcal{Q}^{\mu\nu} k_{i\mu} k_{j\nu}} e^{i(k_{j\nu} q_j^{\nu} + k_{i\mu} q_i^{\mu})}$$

und natürlich die Weyloperatoren, die sich mit der Korrespondenz $\mathcal{W}(g \otimes_{\mathcal{Z}} f)((\mathcal{Q}, q_i)) := g(\mathcal{Q})f(q_i)$ zu

$$\mathcal{W}^{(n)}(g \otimes_{\mathcal{Z}} f)(\mathcal{Q}, q_1, \dots, q_n) := g(\mathcal{Q})f(q_1, \dots, q_n) \quad , \quad g \in \mathcal{C}_0(\Sigma), \quad f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{4n}) \quad ,$$

einem sogenannten n -Symbol $F \rightarrow F(\sigma, x_1, \dots, x_n)$ erweitern. Hierbei ist $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{4n})$ gegeben durch:

$$f(q_1, \dots, q_n) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_1 \dots dk_n \check{f}(k_1, \dots, k_n) e^{i(k_1 q_1 + \dots + k_n q_n)}$$

Das induziert nun analog zu Kapitel 1 ein Produkt, eine Involution und die C^* -Eigenschaft auf den verallgemeinerten n -Symbolen. Die dadurch erzeugte C^* -Algebra ist gegeben durch $\mathcal{E}^{(n)} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n)}) := \mathcal{M}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Anstatt der Kommutatorfunktionen (2.1.1) betrachten wir jetzt den Kommutator von mittlerer und relativer Koordinate. Es stellt sich heraus, dass dieser Ansatz äquivalent zu (2.1.1) ist, denn es gilt zum Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{aligned} [(q_1 + q_2)^{\mu}, (q_1 - q_2)^{\nu}] &= (q^{\mu} \otimes_{\mathcal{Z}} I)(q^{\nu} \otimes_{\mathcal{Z}} I) - (q^{\mu} \otimes_{\mathcal{Z}} I)(I \otimes_{\mathcal{Z}} q^{\nu}) + \dots \\ &= q^{\mu} q^{\nu} \otimes_{\mathcal{Z}} I - \underbrace{q^{\mu} \otimes_{\mathcal{Z}} q^{\nu} + \dots}_{\text{gemischte Terme heben sich paarweise weg}} \\ &= \underbrace{[q^{\mu}, q^{\nu}]}_{\in \mathcal{Z}} \otimes_{\mathcal{Z}} I - I \otimes_{\mathcal{Z}} [q^{\mu}, q^{\nu}] = 0 \end{aligned}$$

Aus dieser Motivation heraus definieren wir nun:

$$\bar{q}^{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i^{\mu} \quad \text{und} \quad q_{ij}^{\mu} = q_i^{\mu} - q_j^{\mu}$$

Damit gilt für die Weylrelation:

$$\begin{aligned} e^{ik_{\mu} \bar{q}^{\mu}} e^{ik'_{\mu} \bar{q}^{\mu}} &= e^{-\frac{i}{2n} \mathcal{Q}^{\mu\nu} k_{\mu} k'_{\nu}} e^{i(k_{\mu} + k'_{\mu}) \bar{q}^{\mu}} \\ e^{ik_{\mu} \bar{q}^{\mu}} e^{ik'_{\mu} q_{ij}^{\mu}} &= e^{ik'_{\mu} q_{ij}^{\mu}} e^{ik_{\mu} \bar{q}^{\mu}} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die mittleren Koordinaten die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen, mit den relativen Koordinaten aber kommutieren. Die ursprünglichen Koordinaten (2.1.2) erhält man zurück durch

$$q_i^\mu = \bar{q}^\mu + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{ij}^\mu$$

Nun ist noch zu bemerken, dass sich die mittleren Koordinaten $\bar{q}^\mu$ verhalten, als hätten sie eine charakteristische Länge $1/\sqrt{n}$:

$$[\bar{q}^\mu, \bar{q}^\nu] = \frac{1}{n^2} \underbrace{\left[\sum_i q_i^\mu, \sum_j q_j^\nu \right]}_{=n \ iQ^{\mu\nu}(I \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \otimes_{\mathbb{Z}} I)} = \frac{i}{n} Q^{\mu\nu}$$

Wir wollen nun die gemeinsame Algebra der mittleren und relativen Koordinaten konstruieren. Definiere dazu mit Hilfe der mittleren Koordinaten $\tilde{q}$ mit Länge $1/\sqrt{n}$:

$$\bar{q}^\mu := \tilde{q}^\mu \otimes_{\mathbb{Z}} I^{n \otimes \mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad q_{ij}^\mu := I \otimes_{\mathbb{Z}} q_{ij}^\mu$$

und damit

$$q_i^\mu := \bar{q}^\mu + \frac{1}{n} \sum_j q_{ij}^\mu$$

Diese neuen Koordinaten erzeugen (sind affliert zu) eine Algebra, die durch das $(n+1)$ -fache Tensorprodukt $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{E} =: \mathcal{E}^{(n+1)}$, bzw. die Multiplikator-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n+1)})$, gegeben ist. Hierbei ist $\tilde{q}^\mu$ affliert zum ersten Faktor der Algebra $\mathcal{E}^{(n+1)}$ und die q_{ij}^μ zu den restlichen n -Faktoren. Nun kann man wieder die Vertauschungseigenschaften der q_i^μ und q_j^ν anschauen und bekommt:

$$[q_i^\mu, q_j^\nu] = \begin{cases} iQ^{\mu\nu} \otimes_{\mathbb{Z}} I^{n \otimes \mathbb{Z}} =: iQ^{\mu\nu} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

und

$$[\bar{q}^\mu, \bar{q}^\nu] = i \frac{1}{n} Q^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad [\bar{q}^\mu, q_{ij}^\nu] = 0 \quad , \quad (2.1.5)$$

denn es gilt für $i \neq j$

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_l q_{il}^\mu \right), \left(\sum_k q_{jk}^\nu \right) \right] &= \left[\frac{n-1}{n} q_i^\mu - \frac{1}{n} \sum_{l \neq i} q_l^\mu, \frac{n-1}{n} q_j^\nu - \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} q_k^\nu \right] \\ &= - \left(\frac{n-2}{n^2} \right) iQ^{\mu\nu} - \frac{2}{n^2} iQ^{\mu\nu} \\ &= -i \left(\frac{1}{n} \right) Q^{\mu\nu} \end{aligned}$$

und für $i = j$

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_l q_{jl}^\mu \right), \left(\sum_k q_{jk}^\nu \right) \right] &= \left[\frac{n-1}{n} q_j^\mu - \frac{1}{n} \sum_{l \neq j} q_l^\mu, \frac{n-1}{n} q_j^\nu - \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} q_k^\nu \right] \\ &= \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 iQ^{\mu\nu} + \left(\frac{n-1}{n^2} \right) iQ^{\mu\nu} \\ &= i \left(\frac{n-1}{n} \right) Q^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Die obige Konstruktion lässt sich zusammenfassen und präzisieren mithilfe des von Neumannschen¹ Zugangs zur Quantentheorie durch die folgende Bemerkung (siehe [11] und [10]):

Bemerkung 2.1.1. Nach der von Neumannschen Eindeutigkeit existiert für jedes feste $\sigma \in \Sigma$, ein treuer (injektiver) $*$ -Homomorphismus $\beta^{(n)}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \beta^{(n)} &: \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n)}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n+1)}) \\ q_i &\mapsto \mathbf{q}_i =: \beta^{(n)}(q_i) \end{aligned}$$

Beweis. [11] Die Abbildung $q^\mu \mapsto \mathbf{q}_i^\mu$ bedingt zunächst einen $*$ -Homomorphismus $\tilde{\beta}_i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{(n+1)}$ durch die formale Eigenschaft $\tilde{\beta}_i(q^{\mu*}) = (I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} q^\mu \otimes_{\mathcal{Z}} I \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} I)^* = \tilde{\beta}_i(q_i^\mu)^* = \mathbf{q}_i^{\mu*}$. Die simultane Abbildung aller Koordinaten wird nun erreicht, indem man die universellen Eigenschaften² des Tensorproduktes und seine Eindeutigkeit für nukleare C^* -Algebren (wie $\mathcal{E}$) ausnutzt. Das bedeutet, dass ein $*$ -Homomorphismus $\beta^{(n)}: \mathcal{E}^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}^{(n+1)}$ existiert im Sinne von $\tilde{\beta}^{(n)}(q^\mu \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} q^\mu) = \tilde{\beta}^{(n)}(q_1^\mu \ q_2^\mu \ \dots \ q_n^\mu) = \tilde{\beta}_1(q_1^\mu) \dots \tilde{\beta}_n(q_n^\mu)$. Dieser Sachverhalt lässt sich nun in kanonischer Weise auf die Multiplikator-Algebren durch den $*$ -Homomorphismus $\beta^{(n)}: \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n)}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n+1)})$ erweitern. Die Bilder von β_i und β_j kommutieren für $i \neq j$ und die Einschränkung von $\beta_i|_{\mathcal{Z}}$ ist ein Isomorphismus, der von dem Index i unabhängig ist (der Kommutator ist unabhängig von i). Demnach ist $\beta^{(n)}$ injektiv (treu) auf ganz $\mathcal{Z}$ per Konstruktion. Zu zeigen ist jetzt nur noch, dass die Injektivität auf dem Zentrum genügt um eine treue Abbildung auf ganz $\mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n)})$ zu bekommen. Betrachte dazu die C^* -Algebra $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ der kompakten Operatoren auf dem unendlichdimensionalen Hilbertraum. Für diese gilt $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$, in Analogie dazu bekommen wir $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{E} \simeq \mathcal{C}_0(\Sigma, \mathcal{K})$. Das heißt, abgeschlossene Ideale aus $\mathcal{E}^{(n)}$ bilden sich 1 : 1 ab auf eine abgeschlossene Untermenge von Σ . Explizit ausgedrückt ist

$$\begin{aligned} \beta^{(n)} \circ F(\mathcal{Q}, q_1, \dots, q_n) &= \beta^{(n)}(g(\mathcal{Q})f(q_1, \dots, q_n)) \\ &= g(\mathbf{Q}) \int dk_1 \dots dk_n \check{f}(k_1, \dots, k_n) e^{i(k_1 \mathbf{q}_1 + \dots + k_n \mathbf{q}_n)} \\ &= g(\mathbf{Q})f(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \end{aligned}$$

ein treuer $*$ -Homomorphismus. □

Die ursprüngliche Intention war, die euklidische Länge zu minimieren. Das soll nun verwirklicht werden. Indem wir die neu eingeführten relativ Koordinaten $\mathbf{q}_{ij}^\mu$ ideal lokalisieren (den Grundzustand auf die $\mathbf{q}_{ij}^\mu$ anwenden), minimieren wir auch den euklidische Abstand $|q_i^\mu - q_j^\mu|$. Leider wird durch die Wahl fester Zustände die Lorentzinvarianz gebrochen (aber nicht spontan!), aber die Rotations- und Translationsinvarianz bleibt erhalten. Im Limes $\lambda_{\mathbf{P}} \rightarrow 0$ erhalten wir jedoch die gewöhnliche Quantenfeldtheorie und somit auch die Lorentzinvarianz zurück.

¹Der Satz von von Neumann findet hier Anwendung, da wir die kompakten Operatoren auf dem unendlichdimensionalen Hilbertraum zur Verfügung haben.

²Das gewährleistet, dass die C^* -Norm auf dem tensorierten Raum eindeutig ist (siehe z.B.[16]).

2.2 Simultane Lokalisierung n -übereinstimmender Ereignisse

Die nächste Aufgabe ist nun eine Abbildung zu finden, die simultan alle Relativkoordinaten lokalisiert. Die Hauptrolle wird dabei der in Abschnitt 1.3 definierten Lokalisierungsabbildungen $\eta := \eta_0$ und der Einschränkung γ mit $\gamma F = F|_{\Sigma^{(1)}}$ und $\eta = \eta^{(1)} \circ \gamma$ zukommen. Mit Hilfe des $*$ -Homomorphismus $\beta^{(n)}$ bekommen wir dann eine in $\sigma \in \Sigma$ konstante Funktion. Wir definieren somit die Quanten-Diagonal-Abbildung:

Definition 2.2.1. Sei $\beta^{(n)} : \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n)}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n+1)})$ definiert wie in Bemerkung 2.1.1, $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_1$ die Einschränkung der Symbole F auf $\Sigma^{(1)}$ und $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma^{(1)})$ die Lokalisierung. Die Abbildung

$$E^{(n)} : \mathcal{M}(\mathcal{E}^{(n)}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$$

ist definiert durch

$$E^{(n)} = (\underbrace{\gamma \otimes_{\mathcal{Z}} \eta \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} \eta}_{n \text{ Faktoren}}) \circ \beta^{(n)}$$

und wird als Quanten-Diagonal-Abbildung bezeichnet.

Um diese Definition zu motivieren, betrachten wir die Wirkung des n -fachen Tensorproduktes der Lokalisierungen angewandt auf den Exponenten der Koordinaten q_{ij} :

$$\begin{aligned} \langle \eta \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \otimes_{\mathcal{Z}} \eta, e^{ik_{\mu} q_{ij}^{\mu} / \sqrt{2}} \rangle &= \\ &= \langle \eta, I \rangle \dots \langle \eta, I \rangle \langle \eta, e^{ik_{\mu} q^{\mu} / \sqrt{2}} \rangle \langle \eta, I \rangle \dots \langle \eta, I \rangle \langle \eta, e^{-ik_{\mu} q^{\mu} / \sqrt{2}} \rangle \langle \eta, I \rangle \dots \langle \eta, I \rangle \\ &= \langle \eta, e^{ik_{\mu} q^{\mu} / \sqrt{2}} \rangle \langle \eta, e^{-ik_{\mu} q^{\mu} / \sqrt{2}} \rangle \\ &= \left(e^{-\frac{1}{4} \sum_{\mu} k_{\mu}^2} \right) \left(e^{-\frac{1}{4} \sum_{\mu} (-k_{\mu})^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu} k_{\mu}^2} \\ &= \langle \eta, e^{ik_{\mu} q^{\mu}} \rangle \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die q_i für $i \neq j$ miteinander kommutieren :

$$e^{ik_{\mu} q_{ij}^{\mu} / \sqrt{2}} = e^{ik_{\mu} (q_i^{\mu} / \sqrt{2} - q_j^{\mu} / \sqrt{2})} = e^{ik_{\mu} q_i^{\mu} / \sqrt{2}} e^{-ik_{\mu} q_j^{\mu} / \sqrt{2}}$$

Das bedeutet, dass die Lokalisierung einer Koordinate q^{μ} übereinstimmt mit der n -fach-tensorierten Lokalisierung angewendet auf die Differenzen q_{ij} und dass der euklidische Abstand $\sum_{\mu} |q_i^{\mu} - q_j^{\mu}|^2$ minimiert wird. Dieser Sachverhalt sorgt dafür, dass das Ergebnis von σ unabhängig ist. Es wird sich später herausstellen, dass dies der Grund dafür ist, dass im adiabatischen Limes der Vakuumzustand, der noch zu konstruierenden S -Matrix, divergiert.

Proposition 2.2.2. Sei $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{4n})$, $\check{f} \in L^1$. Die explizite Form der Quanten-Diagonal-Abbildung ist

$$E^{(n)} (f(q_1, \dots, q_n)) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_1 \dots dk_n \check{f}(k_1, \dots, k_n) r_n(k_1, \dots, k_n) e^{i(\sum_{j=1}^n k_j) \tilde{q}} \tag{2.2.2}$$

wobei $\tilde{q}$ die mittlere Quanten-Koordinate mit charakteristischer Länge $1/\sqrt{n}$ ist und der Kern r_n gegeben ist durch

$$r_n(k_1, \dots, k_n) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left(\sum_{j=1}^n k_{j\mu}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j,l=0}^n k_{j\mu} k_{l\mu} \right) \right\} \quad (2.2.3)$$

Äquivalent dazu ist die Form

$$E^{(n)}(f(q_1, \dots, q_n)) = h_f(\tilde{q})$$

wobei mit h_f das Symbol von $h_f(\tilde{q})$:

$$h_f(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^{4n}} da_1 \dots da_n f(x + a_1, \dots, x + a_n) \tilde{r}_n(a_1, \dots, a_n) \quad (2.2.4)$$

gemeint ist. Hierbei ist $c_n = \frac{n^2}{(2\pi)^{2(n-2)}}$ eine Konstante und der Kern im Ortsraum gegeben durch:

$$\tilde{r}_n(a_1, \dots, a_n) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}|a_1|^2 - \dots - \frac{1}{2}|a_n|^2 \right\} \delta^{(4)}(a_1 + \dots + a_n) \quad (2.2.5)$$

Insbesondere ist $E^{(n)}(f(q_1, \dots, q_n))$ eine konstante Funktion von $\sigma \in \Sigma_1$ und demnach nicht explizit abhängig von σ .

Der Beweis dieser Proposition ist etwas technisch und beruht letztlich darauf, dass man die Beziehung (2.2.1) ausnutzt und damit eine Reparametrisierung ermöglicht, die die auftretenden Gauß-Kerne von einer Integrationsvariable unabhängig macht (der Ursprung später Divergenzen). Dennoch ist hier der vollständige Beweis angegeben, da die Techniken immer wieder in komplexerer Form auftauchen.

Beweis. [10] Nach Bemerkung 2.1.1 ist $\beta^{(n)}$ gegeben durch

$$\beta^{(n)}(f(q_1 \dots q_n)) = \int dk_N \check{f}(k_N) \underbrace{e^{i \sum_i k_{i\mu} q_i^\mu}}_*$$

eine kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} * &= e^{i \sum_i k_{i\mu} \bar{q}^\mu + i \frac{1}{n} \sum_{i,l} k_{i\mu} (\sum_l q_{il}^\mu)} \\ &= e^{i \sum_i k_{i\mu} (\bar{q}^\mu \otimes_{\mathbb{Z}} I^{n \otimes \mathbb{Z}})} e^{i \frac{1}{n} \sum_i k_{i\mu} (I \otimes_{\mathbb{Z}} \{\sum_l (q_i^\mu - q_l^\mu)\})} \\ &= \left(e^{i \sum_i k_{i\mu} \bar{q}^\mu} \otimes_{\mathbb{Z}} I^{n \otimes \mathbb{Z}} \right) \left(I \otimes_{\mathbb{Z}} e^{i \frac{1}{n} \sum_i k_{i\mu} q_i^\mu \cdot n - \frac{1}{n} \sum_{il} k_{i\mu} q_l^\mu} \right) \\ &= \left(e^{i \sum_i k_{i\mu} \bar{q}^\mu} \otimes_{\mathbb{Z}} I^{n \otimes \mathbb{Z}} \right) \left(I \otimes_{\mathbb{Z}} e^{i \sum_i [(k_{i\mu} - \frac{1}{n} \sum_l k_{l\mu}) q_i^\mu]} \right) \\ &= \left(e^{i \sum_i k_{i\mu} \bar{q}^\mu} \otimes_{\mathbb{Z}} I^{n \otimes \mathbb{Z}} \right) \left(I \otimes_{\mathbb{Z}} e^{i [(k_{1\mu} - \sum_l k_{l\mu}) q_1^\mu]} \otimes_{\mathbb{Z}} e^{i [(k_{2\mu} - \sum_l k_{l\mu}) q_2^\mu]} \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \right) \\ &= e^{i \sum_i k_{i\mu} \bar{q}^\mu} \otimes_{\mathbb{Z}} e^{i \sum_i [(k_{i\mu} - \frac{1}{n} \sum_l k_{l\mu}) q_i^\mu]} \end{aligned}$$

Damit berechnet sich die Quanten-Diagonal-Abbildung wie folgt:

$$\begin{aligned}
E^{(n)}(f(q_1, \dots, q_n)) &= (\gamma \otimes_{\mathcal{Z}} \eta^{n \otimes \mathcal{Z}}) \circ \beta^{(n)}(f(q_1, \dots, q_n)) = \\
&= \int dk_N \check{f}(k_N) \left\langle \gamma \otimes_{\mathcal{Z}} \eta \dots \otimes_{\mathcal{Z}} \eta, e^{i \sum_i k_{i\mu} \tilde{q}^\mu} \otimes_{\mathcal{Z}} e^{i[(k_{1\mu} - \sum_l k_{l\mu})q^\mu]} \otimes_{\mathcal{Z}} e^{i[(k_{2\mu} - \sum_l k_{l\mu})q^\mu]} \otimes_{\mathcal{Z}} \dots \right\rangle \\
&= \int dk_N \check{f}(k_N) \left\langle \gamma, e^{i \sum_i k_{i\mu} \tilde{q}^\mu} \right\rangle \left\langle \eta, e^{i[(k_{1\mu} - \sum_l k_{l\mu})q^\mu]} \right\rangle \left\langle \eta, e^{i[(k_{2\mu} - \sum_l k_{l\mu})q^\mu]} \right\rangle \dots \\
&= \int dk_N \check{f}(k_N) e^{i \sum_i k_{i\mu} \tilde{q}^\mu} \prod_i e^{-\frac{1}{2} |k_i - \frac{1}{n} \sum_l k_l|^2}
\end{aligned}$$

Die obige Rechnung war möglich aufgrund der Eigenschaften (2.1.4) und (2.1.5), die eine in $\sigma \in \Sigma^{(1)}$ konstante Funktion als Resultat zeigt. Das beweist (2.2.2) und (2.2.3).

Um die Darstellung im Ortsraum zu berechnen, wählen wir das Symbol $h_f(x)$ von $h_f(\tilde{q})$ (bezüglich der mittleren Koordinate):

$$h_f(x) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_N \check{f}(k_1, \dots, k_2) e^{i \sum_i k_{i\mu} x^\mu} \prod_i e^{-\frac{1}{2} |k_i - \frac{1}{n} \sum_l k_l|^2}$$

Nun führen wir eine Fouriertransformation durch:

$$h_f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} dy_N f(y_1, \dots, y_n) \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_N e^{i \sum_i k_i (y_i - x)} \prod_i e^{-\frac{1}{2} |k_i - \frac{1}{n} \sum_l k_l|^2}$$

mit der Transformation $a_i = y_i - x$ erhält man dann:

$$h_f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} da_N f(x + a_1, \dots, x + a_n) \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_N e^{i \sum_i k_i a_i} \prod_i e^{-\frac{1}{2} |k_i - \frac{1}{n} \sum_l k_l|^2} .$$

Definiere nun den Kern im Ortsraum durch

$$c_n \tilde{r}_n := \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_N e^{i \sum_i k_i a_i} \prod_i e^{-\frac{1}{2} |k_i - \frac{1}{n} \sum_l k_l|^2} .$$

Die folgende Koordinatentransformation in den Impulsen macht den Gauß-Kern unabhängig von einer der Integrationsvariablen durch den Übergang zu relativen und mittleren Koordinaten [10]. Um die Formeln möglichst übersichtlich zu halten führen wir einige Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
\underline{a}^\mu &= (a_1^\mu, \dots, a_n^\mu) \in \mathbb{R}^n \\
\underline{\mathbf{a}} &= (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{3n} \\
\underline{a} &= (\underline{a}^0, \underline{\mathbf{a}}) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{4n}
\end{aligned}$$

Werden alle Vierervektoren a_i um denselben Vierervektor x translatiert, so schreibe:

$$\underline{a} - x = (a_1 - x, a_2 - x, \dots, a_n - x)$$

weiter soll gelten

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^n a^0 b^0 - \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^n a^0 b^0 - \sum_{\mu=1}^3 \sum_{i=1}^n a_i^\mu b_i^\mu$$

wobei der Punkt $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}$ das euklidische Skalarprodukt ist und

$$d\underline{a} = d\underline{a}^0 d\underline{\mathbf{a}} = \prod_{\mu=0}^3 \prod_{i=1}^n da_i^\mu \quad .$$

Für eine Funktion $g(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^4$ sei:

$$g^{(n)}(\underline{x}) = g(x_1)g(x_2) \dots g(x_n)$$

Wir benötigen noch die Vektoren

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &:= \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\xi}' &:= (\underline{\xi}, \underline{\xi}) \in \mathbb{R}^{4n} \end{aligned}$$

und die orthogonalen Projektionen

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\underline{\xi} \\ P' = P \oplus P \oplus P \oplus P &: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}(\underline{\xi}, \underline{\xi}) \end{aligned}$$

mit

$$P := \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{4 \times 4} & \dots & \mathbb{1}_{4 \times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{1}_{4 \times 4} & \dots & \mathbb{1}_{4 \times 4} \end{pmatrix}$$

und schließlich noch die $4n \times 4n$ Einheitsmatrix $I' = (I, \mathbf{I})$

$$I' = (I, \mathbf{I}) := \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1}_{3n \times 3n} \end{array} \right)$$

und schreibe damit

$$e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |k_i - \frac{1}{n} \sum_l k_l|^2} = e^{-\frac{1}{2} |(I' - P')\underline{k}|^2}$$

Sei nun $R \in \mathcal{O}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $R^t R = R^{-1} R = \mathbb{1}_{n \times n}$ und $\det R = 1$, sodass

$$\begin{aligned} R\underline{\xi} &= \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \\ R'\underline{\xi}' &= (R\underline{\xi}, \mathbf{R}\underline{\xi}) = (\underline{e}_n, \underline{e}_n) = \underline{e}'_n \in \mathbb{R}^{4n} \quad . \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} E &= R^t P R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\underline{e}_n \\ E' &= R^t P' R' : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}\underline{e}'_n \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

sind dann die orthogonalen Projektionen auf die n -te Komponente. Nun ändern wir noch die Integrationsvariablen zu $\underline{p} = (R\underline{k}^0, \mathbf{R}\underline{k}) = R'\underline{k}$ und nutzen aus, dass orthogonale Matrizen die Länge eines Vektors invariant lassen;

$$|(I' - E')\underline{p}| = |(R'^t R' - (R'^t P' R')R'\underline{k})| = |R'^t(I' - P')\underline{k}R'^t R'| = |(I' - P')\underline{k}|$$

und erhalten

$$c_n \tilde{r}_n := \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} dp_1 \dots dp_n e^{ip_\mu (R'^t \underline{a})^\mu} e^{-\frac{1}{2} |(I' - E')\underline{p}|^2}.$$

Die Integration über p_n ist nun vollkommen unabhängig von den anderen $n - 1$ Variablen $\underline{p}^* := (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{4(n-1)}$, da $|(I' - E')\underline{p}| = |\underline{p}^*|$ ist. Wir haben es hier mit einer Fouriertransformation einer Gaußfunktion ($\int_{\mathbb{R}^4} dp e^{-1/2|p|^2} e^{ip_\mu A^\mu} = (2\pi)^2 e^{-1/2|A|^2}$) in $4n - 4$ Variablen zu tun. Die Integration über die n -te Koordinate liefert eine Deltadistribution, wobei man ausnutzt, dass $\delta^{(4)}(1/\sqrt{n}x) = n^2 \delta^{(4)}(x)$:

$$c_n \tilde{r}_n := n^2 (2\pi)^{-2(n-1)} \delta^{(4)}(a_1 + \dots + a_n) e^{-\frac{1}{2} |R'^t \underline{a}|^2}$$

also ist $c_n = n^2 (2\pi)^{-2(n-1)}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{r}_n &= e^{-\frac{1}{2} |R'^t \underline{a}|^2} \delta^{(4)}(a_1 + \dots + a_n) \\ &= e^{-\frac{1}{2} |a_1|^2 - \dots - \frac{1}{2} |a_n|^2} \delta^{(4)}(a_1 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Das beweist (2.2.4) und (2.2.5). □

2.3 Wechselwirkung im Hamilton-Formalismus

Der Hamilton Ansatz auf der quantisierten Raumzeit $\mathcal{E}$ wird bereits in [4] eingeführt. Eine wesentliche Eigenschaft die man dabei ausnutzt ist, dass der zunächst freie Hamiltonoperator mit Masse m auf $\mathcal{E}$ als räumliches Integral einer Hamiltondichte geschrieben werden kann:

$$H_0 = \int_{q^0=t} d^3q \mathcal{H}(q)$$

Dies ist möglich, da allgemein für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^4, \mathcal{Z}) \cap \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^4, \mathcal{Z})$ gezeigt wird, dass durch die Definition einer $\mathcal{Z}$ -wertigen Spur³ $Tr(f(q)) := \check{f}(0)$ gilt:

$$\int_{q^0=t} d^3q f(q) := \int dk_0 e^{ik_0 t} \check{f}(k_0, 0, 0, 0) \quad (2.3.1)$$

³In [4] ist bewiesen, dass die Spur $Tr(f(q)) \equiv \int d^4q f(q)$ positiv ist und die Eigenschaft erfüllt:

$$Tr(f(q)g(q)) = \int d^4q f(q)g(q) = \int d^4x f(x) \star_\sigma g(x) = \int f(x)g(x)$$

ein positives lineares Funktional mit Werten im Zentrum $\mathcal{Z}$ bildet und konsistent ist mit

$$\int dt \int_{q^0=t} f(q) = \int d^4q f(q) \quad .$$

Diese Tatsache ist mit den Unschärferelationen insofern vereinbar, dass scharfe Lokalisierung in der Zeit totale Delokalisierung im Raum zur Folge hat. Der Vollständigkeit halber sei hier die explizite Form von H_0 angegeben, wie sie in [11] für freie Felder, die die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, angegeben ist:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \int_{x^0=t} d^3x :[(\partial_0 \phi(x))^2 + (\nabla \phi(x))^2 + m^2 \phi(x)]: \\ &= \frac{1}{2} \int_{q^0=t} d^3q :[(\partial_0 \phi(q))^2 + (\nabla \phi(q))^2 + m^2 \phi(q)]: \end{aligned}$$

Eine Wechselwirkung lässt sich nun wie in der herkömmlichen Quantenfeldtheorie durch einen Störterm H_I einschalten:

$$H = H_0 + H_I$$

Eine Möglichkeit ist, H_I wie den freien Hamiltonoperator zu behandeln, indem man zum Beispiel eine $\lambda \phi^n$ Hamiltondichte betrachtet und (2.3.1) ausnutzt:

$$H_I(t) = \frac{\lambda}{n!} \int_{\Sigma^{(1)}} d\mu_\sigma \int_{q^0=t} d^3q : \phi^n(q) : \quad (2.3.2)$$

Das Integral über $\Sigma^{(1)}$ ist dann notwendig, um die Abhängigkeit von $Q^{\mu\nu}$ zu eliminieren⁴, wobei man noch das Problem hat, dass die Wahl des Integrationsmaßes hierbei eine Rolle⁵ spielt. Dieser Ansatz ist ausführlich in [11] beschrieben, soll aber hier nicht weiter verfolgt werden.

Anstatt die Hamiltondichte (2.3.2) zu wählen, machen wir einen anderen Ansatz. Mit Hilfe der Quanten-Diagonal-Abbildung ist es möglich eine regularisierte (reguläre) ϕ^n -Wechselwirkung zu konstruieren. Diese ist in σ konstant. Das ist der Grund, weshalb die Integration über $\Sigma^{(1)}$ mit einem Haarschen Maß bezüglich der orthogonalen Gruppe durchgeführt werden kann. Da die Quanten-Diagonal-Abbildung die Symbole auf $\Sigma^{(1)}$ einschränkt, verlieren wir dadurch die Lorentzsymmetrie. Auch lässt es sich nicht realisieren den freien Hamiltonoperator H_0 wie den Störterm mit der Quanten-Diagonal-Abbildung zu definieren. Wir wollen nun den Begriff der regulären Wechselwirkung präzisieren:

Definition 2.3.1. Sei $\phi(q)$ ein Quantenfeld wie in Kapitel 1 und $E^{(n)} : \mathcal{E}^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}_1$ die Quanten-Diagonal-Abbildung. Das reguläre Feldmonom ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \phi_R^{(n)}(\tilde{q}) &:= E^{(n)}(\phi(q_1) \dots \phi(q_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_1 \dots dk_n r_n(k_1 \dots k_n) \check{\phi}(k_1) \dots \check{\phi}(k_n) e^{i(k_1 + \dots + k_n)\tilde{q}} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

⁴In dem Produkt $\phi^n(q)$ mit $n > 2$ tauchen sogenannte Twists auf, die dafür sorgen, dass die Hamiltondichte von möglichen Werten von $Q^{\mu\nu}$ abhängt.

⁵Das Problem ist hierbei ein lorentzinvariantes Maß zu finden.

Das Symbol $\phi_R^{(n)}(x)$ von $\phi_R^{(n)}(\tilde{q})$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi_R^{(n)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^{4n}} dk_1 \dots dk_n r_n(k_1, \dots, k_n) \check{\phi}(k_1) \dots \check{\phi}(k_n) e^{i(k_1 + \dots + k_n)x} \\ &= c_n \int_{\mathbb{R}^{4n}} da_1 \dots da_n \tilde{r}_n(x - a_1, \dots, x - a_n) \phi(a_1) \dots \phi(a_n)\end{aligned}$$

Die so definierten Felder sind reguläre Distributionen, denn es gilt die

Proposition 2.3.2. *Das reguläre Feldmonom $\phi_R^{(n)}(x)$ ist eine wohldefinierte Distribution, die Schwartzfunktionen auf Operatoren abbildet, die auf glatte Wellenfunktionen $\psi \in D_S$ wirken.*

Der ausführliche Beweis dieser Proposition ist in [11] zu finden und beruht im Wesentlichen darauf, dass man die Felder mit einer Testfunktion $\lambda(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ verschmiert

$$\int dx \lambda(x) \phi_R^{(n)}(x)$$

und zeigt, dass der dort auftretende Gaußkern zusammen mit $\lambda(t, \mathbf{x})$ eine Testfunktion im $\mathbb{R}^{4n}$ bildet.

Die Folgerung aus dieser Proposition ist, dass keine Normalordnung in den Erzeugern und Vernichtern notwendig ist, um einen endlichen Vakuumerwartungswert zu erhalten. Dennoch setzen wir in unserer Wechselwirkung die Normalordnung ein, um den Vakuumerwartungswert in der Theorie auszublenden. Es wird sich noch zeigen, dass dieser im adiabatischen Limes divergiert. Damit können wir den (nichtlokalen) Wechselwirkungs-Hamiltonoperator bezüglich $\tilde{q}$ definieren:

$$H_I(t) := \lambda \int_{\tilde{q}^0=t} d^3 \tilde{q} \mathcal{L}_{\text{eff}}(\tilde{q})$$

wobei

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\tilde{q}) := \frac{1}{n!} : \phi_R^{(n)}(\tilde{q}) : = \int dk_1 \dots dk_n \check{\mathcal{L}}_{\text{eff}}(k_1, \dots, k_n) e^{i(k_1 + \dots + k_n)\tilde{q}}$$

und

$$\check{\mathcal{L}}_{\text{eff}}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{n!} : \check{\phi}(k_1) \dots \check{\phi}(k_n) :$$

Man beachte, dass der Zeit t hier die Bedeutung einer (über n Ereignisse) gemittelten Zeit zukommt. Dieser Sachverhalt wird später signifikante Auswirkungen auf die Kausalität der Störungstheorie haben. Nachdem der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator definiert ist, könnte man im Prinzip gewöhnliche Störungstheorie betreiben, indem die Schrödingergleichung im Wechselwirkungs-Bild (Dirac-Bild) gelöst wird. Auch hier tritt das bekannte Problem aus der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie auf, dass das Diracbild nicht existiert, beziehungsweise inkonsistent ist (Haagsches Theorem). Nun könnte man meinen, durch die Wahl der regulierten Feldmonome dieses Problem bereits umgangen zu haben. Dem ist aber nicht so, denn nach Proposition 2.3.2 wissen wir, dass der Kern r_n keine Testfunktion im $\mathbb{R}^{4n}$ liefert

und dadurch keine hinreichende (Cut-Off-)Funktion für eine raumzeitliche Einschränkung der Wechselwirkung darstellt. Deshalb folgen wir dem Ansatz der lokalen Quantenfeldtheorie um das Haagsche Theorem zu umgehen und ersetzen die Kopplungskonstante λ durch eine Schwartzfunktion $\lambda(t, \mathbf{x}) = \lambda(t)' \otimes \lambda(\mathbf{x})'' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, die das Raumzeitgebiet beschränkt. Ausgehend von dem Symbol $\phi_R^{(n)}(x)$ von $\phi_R^{(n)}(\tilde{q})$ machen wir die

Definition 2.3.3. Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator ist definiert durch

$$H_I^\lambda(t) := \int dx \delta(x^0 - t) \lambda(x) \mathcal{L}_{\text{eff}}(x)$$

Die Wohldefiniertheit von $H_I^\lambda(t)$ ist gegeben durch die

Bemerkung 2.3.4. $H_I^\lambda(t)$ ist ein wohldefinierter Operator auf dem Raum der glatten Wellenfunktionen $D_{\mathcal{S}}$.

Der Beweis befindet sich in [11]. Wir suchen jetzt nach Lösungen $U_{[\lambda]}(t, s)$ des unitären Zeitentwicklungsoperators der Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} U_{[\lambda]}(t, s) = H_I^\lambda(t) U_{[\lambda]}(t, s)$$

durch Iteration erhält man als Ergebnis die Dyson-Reihe, die sich formal schreibt als:

$$U_{[\lambda]}(t, s) = T \exp \left\{ i \int_t^s H_I^\lambda(\tau) d\tau \right\}$$

Die S -Matrix ist dann definiert für $t \rightarrow -\infty$ und $s \rightarrow +\infty$:

$$S_{[\lambda]} = T \exp \left\{ i \int H_I^\lambda(t) dt \right\} = T \exp \left\{ i \int dt \int dx \delta(x^0 - t) \lambda(x) \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \right\}$$

mit der zeitgeordneten Störungsreihe:

Definition 2.3.5. Die formale S -Matrix ist definiert als

$$\begin{aligned} S_{[\lambda]} &= T \exp \left\{ i \int dt \int dx \delta(x^0 - t) \lambda(x) \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \right\} \\ &= I + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} S^{(N)}_{[\lambda]} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

wobei der N -te "Koeffizient" gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S^{(N)}_{[\lambda]} &= \left(\frac{1}{n!} \right)^N \int dx_1 \dots dx_N \theta(t_1 - t_2) \dots \theta(t_{N-1} - t_N) \\ &\quad \lambda(x_1) : \phi_R^{(n)}(t_1, \mathbf{x}_1) : \dots \lambda(x_N) : \phi_R^{(n)}(t_N, \mathbf{x}_N) : \end{aligned}$$

Der N -te Koeffizient wird später auch in einer Form benötigt, bei der $\lambda(x) = \lambda'(t) \otimes \lambda''(\mathbf{x})$ ist:

$$\begin{aligned} S^{(N)}_{[\lambda]} &= \left(\frac{1}{n!} \right)^N \int dt_1 \dots dt_N \lambda'(t_1) \theta(t_1 - t_2) \dots \lambda'(t_N) \theta(t_{N-1} - t_N) \\ &\quad \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N \lambda''(\mathbf{x}_1) : \phi_R^{(n)}(t_1, \mathbf{x}_1) : \dots \lambda''(\mathbf{x}_N) : \phi_R^{(n)}(t_N, \mathbf{x}_N) : \end{aligned}$$

In der herkömmlichen Quantenfeldtheorie zeigt man [21], dass die S -Matrix charakterisiert ist durch die Eigenschaften der Koeffizienten $\mathcal{T}_N$ definiert durch

$$S_{[\lambda]}^{(N)} = \left(\frac{1}{n!}\right)^N \int dx_1 \dots dx_N \mathcal{T}_N(x_1, \dots, x_N) \lambda(x_1) \dots \lambda(x_N) \quad .$$

Für diese fordert man Translations-Kovarianz, Lorentz-Kovarianz, Unitarität und Kausalität. Wir wissen, dass unsere Theorie translationsinvariant ist, nicht aber lorentzinvariant oder kausal. In [21] aber zeigt sich, dass die ganze Störungstheorie die Lorentzinvarianz nicht benötigt. Da die Kausalität nicht zur Verfügung steht, existiert auch keine sogenannte lokale Kommutativität beziehungsweise Faktorisierung. Dass heißt

$$\mathcal{T}_N(x_1, \dots, x_N) \neq \mathcal{T}_N(x_1, \dots, x_K) \mathcal{T}_N(x_{K+1}, \dots, x_N)$$

für $\{x_1, \dots, x_K\}$ raumartig getrennt zu $\{x_{K+1}, \dots, x_N\}$. Dass diese S -Matrix unitär ist (Erhaltung der Norm) liefert eine allgemeine

Bemerkung 2.3.6. Eine S -Matrix definiert durch (2.3.4) ist formal unitär, d.h. $S_{[\lambda]}^+ S_{[\lambda]} = S_{[\lambda]} S_{[\lambda]}^+ = \mathbb{1}$, wenn der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator $H_I^\lambda(t)$ symmetrisch ist; $H_I^\lambda(t) = H_I^\lambda(t)^+$ und $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ Werte in den reellen Zahlen annimmt.

Der Beweis ist in [11] und [22] zu finden und folgt im Wesentlichen aus der Definition der Zeitordnung für die Felder. Bleibt nur noch zu zeigen, dass der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator auch symmetrisch ist:

Bemerkung 2.3.7. Per Konstruktion gilt $H_I^\lambda(t) = H_I^\lambda(t)^+$.

Man sieht das an der Definition der Felder $\phi(q)$ und der Form des Kernes r_n . Das wechselwirkende Feld kann nun formal definiert werden durch die Formel von Bogoliubov [19]:

$$\phi_{int}(x) := \frac{\delta}{i\delta h} S^{-1}(\lambda, \mathcal{L}_{\text{eff}}) S(\lambda, \mathcal{L}_{\text{eff}} + h(x)\phi(x))|_{h=0}$$

wobei $\lambda(x)$ Testfunktionen sind. Nun folgt das Resultat dieser Konstruktion, die ultraviolett-endliche S -Matrix auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum:

Proposition 2.3.8. Für beliebige Schwartzfunktionen $\lambda(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mit der Eigenschaft $\lambda(x) = \lambda'(t) \otimes \lambda''(\mathbf{x})$ und $\lambda'(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\lambda''(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist die formale Dyson-Reihe

$$\begin{aligned} S_{[\lambda]} &= T \exp \left\{ i \int dt \int dx \lambda(x) \mathcal{L}_{\text{eff}}(x)(t) \right\} \\ &= I + \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{N!} \right)^N S^{(N)}[\lambda] \end{aligned}$$

in jeder Ordnung endlich. Das heißt, der N -te Term der Störungsreihe lässt sich als eine endliche Summe von abschließbaren Operatoren schreiben, die jeder für sich auf den (invarianten) Raum der Wellenfunktionen $\mathcal{D}_S$ wirken.

Beweis. Der Beweis folgt aus den Lemmata 2.4.1, 2.4.2 und 2.4.3 des nächsten Abschnittes. Dort ist er im Impulsraum in voller Länge beschrieben und berichtigt in gewisser Weise den Beweis aus [10]: dort fehlen Integrationen über die Impulse der auftretenden Deltafunktionen, was am Ende zu einer falschen Argumentation führt. Ergänzend dazu ist ein Beweis im Ortsraum in [11] zu finden, der im Prinzip die Argumentationen aus den Beweisen der Propositionen 2.2.2 und 2.3.2 benutzt. $\square$

2.4 Endliche S -Matrixelemente

In diesem Abschnitt beweisen wir Proposition 2.3.8. Seien $a^+(g)$ und $a(g)$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ mit der Testfunktion $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Die Feldoperatoren, betrachtet als quadratische Form [15] auf $D_S \times D_S$, ausgewertet in einer Testfunktion g sind:

$$\begin{aligned} a(g) &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} a(\mathbf{k}) g(-\mathbf{k}) , \quad a^+(g) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} a^+(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}) \\ \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \{ e^{ik_\mu x^\mu} a^+(\mathbf{k}) + e^{-ik_\mu x^\mu} a(\mathbf{k}) \} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

mit $k^0 = \omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass wir die Konvention der Feldoperatoren aus Abschnitt 1.4.1 gewechselt haben. Dies ermöglicht eine bessere Darstellung der folgenden Rechnungen. Um die Übersicht nicht zu verlieren, wird die Notation aus dem Beweis zu Proposition 2.2.2 verwendet. Der N -te Term in der S -Matrix schreibt sich damit als:

$$\begin{aligned} S^{(N)}[\lambda] &= \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{a}_1 \dots d\underline{a}_N \left(\prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\underline{a}_{M+1}^0 - \underline{a}_M^0)) \right) G_\lambda(\underline{a}_1) \dots G_\lambda(\underline{a}_N) \\ &\quad : \phi^{(n)}(\underline{a}_1) : \dots : \phi^{(n)}(\underline{a}_N) : \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

wobei $\kappa^0(\underline{a}^0)$ die Zeitkomponente des Schwerpunktes

$$\kappa(\underline{a}) = (\kappa^0(\underline{a}^0), \dots, \kappa^3(\underline{a}^3)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \in \mathbb{R}^4$$

und $G_\lambda(\underline{a})$ eine Schwartzfunktion

$$G_\lambda(\underline{a}) = \lambda(\kappa(\underline{a})) \cdot e^{-\frac{1}{2}|\underline{a} - \kappa(\underline{a})|^2}$$

ist. Sei nun $I_n = 1, \dots, n$ eine Indexmenge und sei $P(I_n) = \{J_M \subset I_n | J_M = \emptyset \text{ sei erlaubt}\}$. Wähle N Elemente aus der Menge $P(I_n)$ und bezeichne diese Wahl mit

$$J_\bullet = \{J_M \subset I_n | \#J_M = N\}.$$

Setzt man nun die Felder (2.4.1) in den N -ten Term der S -Matrix (2.4.2) ein so ergibt sich durch Ausmultiplizieren des n -fachen Wickproduktes $: \phi^{(n)}(\underline{a}) : = : \phi(a_1) \dots \phi(a_n) :$ eine Summe

über alle $J_\bullet$:

$$S^{(N)}[\lambda] = \sum_{J_\bullet} \int_{\mathbb{R}^{3nN}} \frac{d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_N}{\sqrt{\omega^{(n)}(\mathbf{k}_1) \dots \omega^{(n)}(\mathbf{k}_N)}} K_\lambda^{J_\bullet}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) \quad (2.4.3)$$

$$\left(\prod_{u_1 \in J_1} a^+(\mathbf{k}_{u_1}) \right) \left(\prod_{v_1 \in J_1 \setminus I_n} a(\mathbf{k}_{v_1}) \right) \dots$$

$$\dots \left(\prod_{u_N \in J_N} a^+(\mathbf{k}_{u_N}) \right) \left(\prod_{v_N \in J_N \setminus I_n} a(\mathbf{k}_{v_N}) \right)$$

hierbei ist der Integralkern $K_\lambda^{J_\bullet}$ gegeben durch:

$$K_\lambda^{J_\bullet}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) = c_{n,N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\mathbf{a}_1 \dots d\mathbf{a}_N \left(\prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\mathbf{a}_{M+1}^0 - \mathbf{a}_M^0)) \right) \quad (2.4.4)$$

$$\times G_\lambda(\mathbf{a}_1) \dots G_\lambda(\mathbf{a}_N) e^{i \sum_{M=1}^N \mathbf{k}_{M\mu} \cdot (U_M \mathbf{a}_M^\mu)}$$

Für das richtige Vorzeichen sorgt die diagonale $n \times n$ Matrix U_M :

$$U_{Mu} = \begin{cases} 1, & u \in J_M \\ -1, & u \in I_n \setminus J_M \end{cases}$$

Die Frage ist nun, ob $S^{(N)}[\lambda]$ ein wohldefinierter, eindeutiger Operator auf dem Fockraum $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ ist. Nach [15, Theorem X.44] ist das gegeben, wenn man die einzelnen Summanden auf die Form bringt:

$$\int_{\mathbb{R}^{3(r+s)}} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_r d\mathbf{k}_{r+1} \dots d\mathbf{k}_{r+s} W(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{r+s}) a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_r) a(\mathbf{k}_{r+1}) a(\mathbf{k}_{r+s}) \quad (2.4.5)$$

und fordert, dass $W(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^{3(r+s)})$ ist mit $r, s \in \mathbb{N}$. Wir wollen nun die Terme unseres Matricelementes in dieser Form schreiben. Dazu müssen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in (2.4.3) noch vollständig normalgeordnet werden. Das wird realisiert mithilfe der Kommutatoreigenschaft

$$[a(\mathbf{k}_1), a^+(\mathbf{k}_2)] = a(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) - a^+(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_1) = \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad (2.4.6)$$

der Feldoperatoren. Das Ergebnis ist eine endliche Summe, hervorgerufen durch wiederholtes vorbeikommen der entsprechenden Operatoren:

$$\begin{aligned}
S^{(N)}[\lambda] = \sum_{J_\bullet} \Bigg\{ & \int_{\mathbb{R}^{3(r_1+s_1)}} d\mathbf{p}_{1_1} \dots d\mathbf{p}_{r_1} d\mathbf{p}_{r_1+1} \dots d\mathbf{p}_{r_1+s_1} \left[\frac{K_\lambda^{J_\bullet}(\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{r_1+s_1})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_1}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_1+s_1})}} \right. \\
& \times \left. a^+(\mathbf{p}_{1_1}) \dots a^+(\mathbf{p}_{r_1}) \quad a(\mathbf{p}_{r_1+1}) \dots a(\mathbf{p}_{r_1+s_1}) \right] \\
& + \int_{\mathbb{R}^{3(r_2+s_2+2)}} d\mathbf{p}_{1_2} \dots d\mathbf{p}_{r_2} d\mathbf{p}_{r_2+1} \dots d\mathbf{p}_{r_2+s_2+2} \\
& \left[\frac{K_\lambda^{J_\bullet}(\mathbf{p}_{1_2}, \dots, \mathbf{p}_{r_2+s_2+2})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_2}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2+2})}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{r_2+s_2+1} - \mathbf{p}_{r_2+s_2+2}) \right. \\
& \times \left. a^+(\mathbf{p}_{1_2}) \dots a^+(\mathbf{p}_{r_2}) \quad a(\mathbf{p}_{r_2+1}) \dots a(\mathbf{p}_{r_2+s_2}) \right] \\
& + \dots \\
& \vdots \\
& + \int_{\mathbb{R}^{3(r_m+s_m+t_m)}} d\mathbf{p}_{1_m} \dots d\mathbf{p}_{r_m} d\mathbf{p}_{r_m+1} \dots d\mathbf{p}_{r_m+s_m} d\mathbf{p}_{r_m+s_m+1} \dots d\mathbf{p}_{r_m+s_m+t_m} \\
& \left[\frac{K_\lambda^{J_\bullet}(\mathbf{p}_{1_m}, \dots, \mathbf{p}_{r_m+s_m+t_m})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_m}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_m+s_m+t_m})}} \prod_{\substack{i_m=1 \\ i_m \in 2\mathbb{N}+1}}^{t_m-1} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{r_m+s_m+i_m} - \mathbf{p}_{r_m+s_m+i_m+1}) \right. \\
& \times \left. a^+(\mathbf{p}_{1_m}) \dots a^+(\mathbf{p}_{r_m}) \quad a(\mathbf{p}_{r_m+1}) \dots a(\mathbf{p}_{r_m+s_m}) \right] \\
& + \dots \\
& \vdots \quad \dots \quad \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Es wurde zur besseren Übersicht eine Umbenennung der Impulse durchgeführt:

$$\mathbf{k}_{i_M} \rightarrow \mathbf{k}_{i_M}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_{r+1} \dots, \mathbf{p}_{r+s}, \mathbf{p}_{r+s} \dots, \mathbf{p}_{r+s+t}) \tag{2.4.8}$$

mit $r + s + t = nN$ und $t = 2 \cdot (\# \delta^{(3)}\text{-Distributionen})$. Der erste Term in (2.4.7) ist bereits von der Art wie in (2.4.5) ($t_1 = 0$)

$$W(\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{r_1+s_1}) := \frac{K_\lambda^{J_\bullet}(\mathbf{p}_{1_1}, \dots, \mathbf{p}_{r_1+s_1})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_1}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_1+s_1})}},$$

bei den anderen müssen noch die Integrationen über die Impulse der Deltafunktionen ausgeführt werden. Es bleibt zu zeigen, dass die entsprechenden Integralkerne der einzelnen Terme in $L^2(\mathbb{R}^{3(r_m+s_m)})$ sind. Im ersten Term ist das gegeben, wenn $K_\lambda^{J_\bullet}$ eine Schwartzfunktion ist. Da $(\omega(\mathbf{p}_1) \dots \omega(\mathbf{p}_{r+s}))^{-1/2}$ eine beschränkte, glatte Funktion ist, ist das Produkt dieser Funktion mit $K_\lambda^{J_\bullet}$ wieder eine Schwartzfunktion und somit automatisch in $L^2(\mathbb{R}^{3(r_1+s_1)})$. Deshalb nun das folgende etwas technische

Lemma 2.4.1. *Der Kern $K_\lambda^{J\bullet}$ ist eine Schwartzfunktion [10, Appendix].*

Beweis. Ausgehend von (2.4.4) ist

$$\begin{aligned} K_\lambda^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) &= c_{n,N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{a}_1 \dots d\underline{a}_N \left(\prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\underline{a}_{M+1}^0 - \underline{a}_M^0)) \right) \\ &\quad \times \prod_{M=1}^N \left[\lambda(\kappa(\underline{a}_M)) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a_{iM} - \kappa(\underline{a}_M)|^2} \right] \\ &\quad \times e^{i \sum_{M=1}^N \underline{\mathbf{k}}_{M\mu} \cdot (U_M \underline{a}_M^\mu)} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Im Folgenden wird der Kern einigen technischen Umformungen unterzogen, die am Ende eine präzise Angabe bezüglich Glattheit und Integrierbarkeit zulassen. Setze zunächst

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &:= \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\xi}' &:= (\underline{\xi}, \underline{\xi}) \in \mathbb{R}^{4n} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} V_{\underline{\xi}}(\underline{a}^\mu) &:= \underline{\xi} \cdot \underline{a}^\mu \\ V_{\underline{\xi}}: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ V_{\underline{\xi}}'(\underline{a}) &= (V_{\underline{\xi}}, \mathbf{V}_{\underline{\xi}}) := (\underline{\xi} \cdot \underline{a}^0, \underline{\xi} \cdot \underline{a}^1, \underline{\xi} \cdot \underline{a}^2, \underline{\xi} \cdot \underline{a}^3) \\ V_{\underline{\xi}}': \mathbb{R}^{4n} &\rightarrow \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

Die orthogonalen Projektionen P, P' und die Matrizen $I' = (I, \mathbf{I})$ seien wie im Beweis zu Proposition 2.2.2 gewählt und für das richtige Vorzeichen sorgt wieder die Matrix:

$$U'_M = (U_M, \mathbf{U}_M) := \left(\begin{array}{c|c} U_M & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{U}_M \end{array} \right). \quad (2.4.11)$$

In dieser Notation ist

$$\begin{aligned} \kappa(\underline{a}) &= (\kappa^0(\underline{a}^0), \boldsymbol{\kappa}(\underline{\mathbf{a}})) = \frac{1}{\sqrt{n}}(V_{\underline{\xi}}(\underline{a}^0), \mathbf{V}_{\underline{\xi}}(\underline{\mathbf{a}})) = \frac{V_{\underline{\xi}}'(\underline{a})}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}^4 \\ G_\lambda(\underline{a}) &= \lambda(\kappa(\underline{a})) \cdot e^{-\frac{1}{2}|\underline{a} - \kappa(\underline{a})|^2} = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n}}V_{\underline{\xi}}'(\underline{a})\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}|(I' - P')\underline{a}|^2}. \end{aligned}$$

Damit hat der Kern 2.4.4 folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} K_\lambda^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) &= c_{n,N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{a}_1 \dots d\underline{a}_N \left[\prod_{1 \leq M < N} \theta(\underline{\xi} \cdot (\underline{a}_{M+1}^0 - \underline{a}_M^0)) \right] \\ &\quad \times \prod_{M=1}^N \left[\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n}}V_{\underline{\xi}}'(\underline{a}_M)\right) e^{-\frac{1}{2}|(I' - P')\underline{a}_M|^2} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i \underline{\mathbf{k}}_{M\mu} \cdot (U_M \underline{a}_M^\mu)} \right]. \end{aligned}$$

Sei nun $R \in \mathcal{O}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $R^t R = R^{-1} R = \mathbb{1}_{n \times n}$ ebenfalls wie in dem Beweis zu Proposition 2.2.2. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} E &= R^t P R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\underline{e}_n} \\ E' &= R'^t P' R' : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{\underline{e}'_n} \end{aligned}$$

sind dann wieder die orthogonalen Projektionen auf die n -te Komponente. Es gelten die Beziehungen:

$$V'_{R\xi}(\underline{a}) = V'_{\underline{e}_n}(\underline{a}) = (\underline{e}_n \cdot \underline{a}^0, \dots, \underline{e}_n \cdot \underline{a}^3) = a_n$$

und

$$V'_\xi(\underline{a}) = \underline{\xi}' \cdot \underline{a} = \underline{\xi}' R'^t R' \underline{a} = R' \underline{\xi}' R' \underline{a} = \underline{e}'_n R' \underline{a} = V'_{\underline{e}'_n}(R' \underline{a}) \quad .$$

Nun ändern wir noch die Integrationsvariablen zu $\underline{b} = (R\underline{a}^0, \mathbf{R}\underline{a}) = R' \underline{a}$, nutzen aus, dass orthogonale Matrizen die Länge eines Vektors invariant lassen (siehe Abschnitt 2.2) und erhalten

$$\begin{aligned} K_\lambda^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) &= c_{n,N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{b}_1 \dots d\underline{b}_N \left[\prod_{1 \leq M < N} \theta(\underline{e}_n \cdot (\underline{b}_{M+1}^0 - \underline{b}_M^0)) \right] \\ &\quad \times \prod_{M=1}^N \left[\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{n}} V'_{\underline{e}_n}(\underline{b}_M) \right) e^{-\frac{1}{2} |(I' - E') \underline{b}_M|^2} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(R' U'_M \underline{\mathbf{k}}_M)_\mu \underline{b}_M^\mu} \right] \end{aligned}$$

Die Integration über b_{n_M} ist nun vollkommen unabhängig von den anderen Variablen $\underline{b}_M^* := (b_{1_M}, \dots, b_{n-1_M}) \in \mathbb{R}^{4(n-1)}$. Durch $|(I' - E') \underline{b}_M| = |\underline{b}_M - (0, \dots, 0, b_{n_M})| = |\underline{b}_M^*|$ ergibt sich

$$\begin{aligned} K_\lambda^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) &= c_{n,N} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{4(n-1)N}} d\underline{b}_1^* \dots d\underline{b}_N^* \prod_{M=1}^N e^{-\frac{1}{2} |\underline{b}_M^*|^2} e^{i(R' U'_M \underline{\mathbf{k}}_M)^* \underline{b}_M^{*\mu}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \int_{\mathbb{R}^{4N}} d\underline{b}_{n_1} \dots d\underline{b}_{n_N} \left[\prod_{1 \leq M < N} \theta(b_{n_{M+1}}^0 - b_{n_M}^0) \right] \right. \\ &\quad \left. \prod_{M=1}^N \left[\lambda \left(\frac{b_{n_M}}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{1}{2} |b_{n_M}|^2} e^{i(V'_{\underline{e}_n}(R' U'_M \underline{\mathbf{k}}_M))_\mu b_{n_M}^\mu} \right] \right\} \end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht schreibe $\beta_M = b_{n_M}$. Mit der Identität

$$|(R' U'_M \underline{\mathbf{k}}_M)^*| = |(I' - E') R' U'_M \underline{\mathbf{k}}_M| = |(I' - P') U'_M \underline{\mathbf{k}}_M| \quad ,$$

dem Ansatz $\lambda(a) = \lambda'(a^0) \otimes \lambda''(\mathbf{a})$ und der Tatsache, dass der erste Faktor nur eine fourier-transformierte Gauß-Funktion ist ($\int_{\mathbb{R}^4} db e^{-1/2|b|^2} e^{-iA_\mu b^\mu} = (2\pi)^2 e^{-1/2|A|^2}$), erhält man

$$\begin{aligned} K_\lambda^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) &= c_{n,N} \left\{ (2\pi)^{2(n-1)N} \prod_{M=1}^N e^{-\frac{1}{2} |(I' - P') U'_M \underline{\mathbf{k}}_M|^2} \right\} \\ &\times \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} d\beta_1^0 \dots d\beta_N^0 \left[\prod_{1 \leq M < N} \theta(\beta_{M+1}^0 - \beta_M^0) \right. \right. \\ &\quad \left. \prod_{M=1}^N \lambda' \left(\frac{\beta_M^0}{\sqrt{n}} \right) e^{i(V'_{\underline{\mathbf{e}}_n} (R' U'_M \underline{\mathbf{k}}_M))_0 \beta_M^0} \right] \right\} \\ &\times \left\{ \int_{\mathbb{R}^{3N}} d\beta_1 \dots d\beta_N \prod_{M=1}^N \left[\lambda'' \left(\frac{\beta_M}{\sqrt{n}} \right) e^{i(\mathbf{V}_{\underline{\mathbf{e}}_n} (\mathbf{R} U_M \underline{\mathbf{k}}_M)) \cdot \beta_M} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Der erste Faktor ist eine Schwartzfunktion. Die Integration über die Zeitkomponenten ist eine Fouriertransformation einer $L^1(\mathbb{R}^N)$ -Funktion und beschränkt und glatt in $(\underline{\mathbf{k}}_1^0, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N^0)$. Da die Fouriertransformation ein Isomorphismus auf dem Schwartzraum ist, bekommt man durch den letzten Faktor auch eine Schwartzfunktion. Das Produkt zweier Schwartzfunktionen ist wieder eine Schwartzfunktion und das Produkt von einer beschränkten, glatten Funktion mit einer Schwartzfunktion ist ebenfalls eine Schwartzfunktion. Folglich ist $K_\lambda^{J\bullet}$ eine Schwartzfunktion in $(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N)$. $\square$

Mit diesem Lemma ist

$$W(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r_1+s_1}) \in L^2(\mathbb{R}^{r_1+s_1}) \quad .$$

Der nächste Schritt ist nun zu zeigen, dass die Terme mit den Deltadistributionen auch Integralkerne aus $L^2(\mathbb{R}^{r_m+s_m})$ im Sinne von (2.4.5) enthalten (was in [10] nicht gezeigt wurde). Zunächst gilt es aber zu klären, dass das Produkt der Deltadistributionen wohldefiniert ist. Deshalb nun das

Lemma 2.4.2. *Seien $l_1, \dots, l_a$ reelle, lineare Funktionale auf $\mathbb{R}^d$ mit $a \leq d$, $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltadistribution und $f(x_1, \dots, x_d)$ eine Schwartzfunktion. Die Abbildung auf dem Raum der Schwartzfunktionen*

$$f \mapsto \int dx_1 \dots dx_d f(x_1, \dots, x_d) \prod_{i=1}^a \delta(l_i(x_1, \dots, x_d)) \quad (2.4.13)$$

ist eine wohldefinierte Distribution, dann und nur dann, wenn die Funktionale $l_1, \dots, l_a$ linear unabhängig sind.

Eine Skizze für den Beweis in die $\Rightarrow$ -Richtung ist in [10, Remark 3.3] zu finden. Hier sei aber der vollständige Beweis gegeben:

Beweis.

' $\Leftarrow$ '

Angenommen (2.4.13) sei eine wohldefinierte Abbildung auf dem Schwartzraum, dann folgt, dass das Produkt der Deltadistributionen wohldefiniert ist. Seien jetzt die linearen Funktionale $l_1, \dots, l_a$ nicht alle linear unabhängig, also $l_i = \sum_{j=1, j \neq i}^a \alpha_j l_j$ (für ein oder mehrere l_i), so bekommt man ein Produkt zweier oder mehrerer Deltadistributionen mit demselben Argument $\delta(l_i) \cdot \delta(l_i)$. Dieses ist aber gerade nicht definiert, was zum Widerspruch führt. (Betrachte dazu $F(x_1, \dots, x_n, l_i) := f(x_1, \dots, x_n) \delta(l_i)$. Der so definierte Ausdruck bildet keine Testfunktion wegen der Singularität bei l_i und somit ist $\int dx_1 \dots dx_n F(x_1, \dots, x_n, l_i) \delta(l_i)$ nicht definiert.)

' $\Rightarrow$ '

Die Funktionale $l_1, \dots, l_a$ seien wieder linear unabhängig. Es ist jetzt möglich einen Basiswechsel durchzuführen, sodass $y_i = y_i(x_1, \dots, x_d)$ mit $y_{d-a+1} = l_1, \dots, y_d = l_a$. Nun lässt sich die Integration direkt über alle a Deltadistributionen ausführen. Man bekommt ein Integral der Form:

$$\begin{aligned} & \int dy_1 \dots dy_{d-a} dl_1 \dots dl_a f(y_1, \dots, y_{d-a}, l_1, \dots, l_a) \prod_{i=1}^a \delta(l_i) = \\ & = \int dy_1 \dots dy_{d-a} f(x_1(y_1, \dots, y_{d-a}), \dots, x_d(y_1, \dots, y_{d-a})) \end{aligned}$$

Die Abbildungen $x_i(y_1, \dots, y_{d-a})$ sind nun lineare, injektive Abbildungen $\mathbb{R}^{d-a} \rightarrow \mathbb{R}^d$ und f ist eine Schwartzfunktion. Es folgt, dass (2.4.13) wohldefiniert ist. $\square$

Dieses Lemma lässt sich direkt auf (2.4.7) anwenden. Da die Kommutatoren (2.4.6), aufgrund der Definition der Wickprodukte, jeweils nur einmal vorkommen können, sind die Argumente der Deltadistributionen immer linear unabhängig. Außerdem sind die in den Argumenten auftretenden Impulse von denen der Feldoperatoren verschieden. Deren Produkt ist das Tensorprodukt und somit wohldefiniert. Die jeweiligen Summanden mit Deltadistributionen lassen sich somit auswerten. Zunächst sei $t_2 = 2$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{3(r_2+s_2+2)}} d\mathbf{p}_{1_2} \dots d\mathbf{p}_{r_2+s_2+2} \frac{K_{\lambda}^{J \bullet}(\mathbf{p}_{1_2}, \dots, \mathbf{p}_{r_2+s_2+2})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_2}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2+2})}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{r_2+s_2+1} - \mathbf{p}_{r_2+s_2+2}) \\ & \quad \times a^+(\mathbf{p}_{1_2}) \dots a^+(\mathbf{p}_{r_2}) a(\mathbf{p}_{r_2+1}) \dots a(\mathbf{p}_{r_2+s_2}) \\ & = \int_{\mathbb{R}^{3(r_2+s_2+2)}} d\mathbf{p}_{1_2} \dots d\mathbf{p}_{r_2+s_2} \frac{K_{t_2, \lambda}^{J \bullet}(\mathbf{p}_{1_2}, \dots, \mathbf{p}_{r_2+s_2})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_2}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2})}} a^+(\mathbf{p}_{1_2}) \dots a^+(\mathbf{p}_{r_2}) a(\mathbf{p}_{r_2+1}) \dots a(\mathbf{p}_{r_2+s_2}) \end{aligned}$$

wobei in $K_{t_2, \lambda}^{J \bullet}$ die Auswertung der Deltafunktion zusammengefasst ist:

$$K_{t_2, \lambda}^{J \bullet} = \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{p}_{r_2+s_2+1} d\mathbf{p}_{r_2+s_2+2} \frac{K_{\lambda}^{J \bullet}(\mathbf{p}_{1_2}, \dots, \mathbf{p}_{r_2+s_2+2})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2+1}) \omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2+2})}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{r_2+s_2+1} - \mathbf{p}_{r_2+s_2+2})$$

Für ein allgemeinen Term erhält man entsprechend:

$$K_{t_m, \lambda}^{J\bullet} = \int_{\mathbb{R}^{3t_m}} d\mathbf{p}_{r_2+s_2+1} \dots d\mathbf{p}_{r_2+s_2+t_m} \frac{K_{\lambda}^{J\bullet}(\mathbf{p}_{12}, \dots, \mathbf{p}_{r_2+s_2+t_m})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2+1}) \dots \omega(\mathbf{p}_{r_2+s_2+t_m})}} \\ \times \prod_{\substack{i_m=1 \\ i_m \in 2\mathbb{N}+1}}^{t_m-1} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{r_m+s_m+i} - \mathbf{p}_{r_m+s_m+i+1})$$

Die Frage nach Integrierbarkeit und Glattheit von $K_{t_m, \lambda}^{J\bullet}$ liefert folgendes

Lemma 2.4.3. *Der Kern $K_{t_m, \lambda}^{J\bullet}$ ist eine Schwartzfunktion.*

Beweis. Ausgangspunkt für die folgenden Berechnungen ist wieder (2.4.4), am Ende kann dann die Transformation (2.4.8) durchgeführt werden. Zunächst sei $t_2 = 2$

$$K_{t_2, \lambda}^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \widehat{\underline{\mathbf{k}}_{ij}}, \dots, \widehat{\underline{\mathbf{k}}_{i'j'}}, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) = \\ = c_{n, N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{a}_1 \dots d\underline{a}_N \left(\prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\underline{a}_{M+1}^0 - \underline{a}_M^0)) \right) G_{\lambda}(\underline{a}_1) \dots G_{\lambda}(\underline{a}_N) \\ \times e^{i \sum_{M=1}^N \underline{k}_{M\mu} \cdot (U_M \underline{a}_M^{\mu}) - ik_{ij\mu} (U_{jj} a_{ij})^{\mu} - ik_{i'j'\mu} (U_{j'j'} a_{i'j'})^{\mu}} \\ \times \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\underline{\mathbf{k}}_{ij} d\underline{\mathbf{k}}_{i'j'}}{\sqrt{\omega(\underline{\mathbf{k}}_{ij}) \omega(\underline{\mathbf{k}}_{i'j'})}} e^{ik_{ij\mu} (U_{jj} a_{ij})^{\mu} + ik_{i'j'\mu} (U_{j'j'} a_{i'j'})^{\mu}} \delta^{(3)}(\underline{\mathbf{k}}_{ij} - \underline{\mathbf{k}}_{i'j'})$$

Hier ist $i, i' \in \{1, \dots, n\}$ und $j, j' \in \{1, \dots, N\}$ mit $i \neq i'$ und $j \neq j'$. Der Hut $\widehat{}$ über den Variablen bedeutet, dass diese fehlen. Der letzte Faktor ist der aus der Quantenfeldtheorie bekannte Δ_+ -Propagator:

$$i 2(2\pi)^3 \Delta_+(U_{jj} a_{ij} + U_{j'j'} a_{i'j'}) = \\ = \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\underline{\mathbf{k}}_{ij} d\underline{\mathbf{k}}_{i'j'}}{\sqrt{\omega(\underline{\mathbf{k}}_{ij}) \omega(\underline{\mathbf{k}}_{i'j'})}} e^{ik_{ij\mu} (U_{jj} a_{ij})^{\mu} + ik_{i'j'\mu} (U_{j'j'} a_{i'j'})^{\mu}} \delta^{(3)}(\underline{\mathbf{k}}_{ij} - \underline{\mathbf{k}}_{i'j'}) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{\mathbf{k}}_{ij}}{(\underline{\mathbf{k}}_{ij}^2 + m^2)} e^{ik_{ij\mu} (U_{jj} a_{ij} + U_{j'j'} a_{i'j'})^{\mu}}$$

Damit erhalten wir:

$$K_{t_2, \lambda}^{J\bullet}(\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \widehat{\underline{\mathbf{k}}_{ij}}, \dots, \widehat{\underline{\mathbf{k}}_{i'j'}}, \dots, \underline{\mathbf{k}}_N) = \\ = \tilde{c}_{t_2, n, N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{a}_1 \dots d\underline{a}_N \left(\prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\underline{a}_{M+1}^0 - \underline{a}_M^0)) \right) G_{\lambda}(\underline{a}_1) \dots G_{\lambda}(\underline{a}_N) \\ \times \exp \left\{ i \sum_{M=1}^N \underline{k}_{M\mu} \cdot (U_M \underline{a}_M^{\mu}) - ik_{ij\mu} (U_{jj} a_{ij})^{\mu} - ik_{i'j'\mu} (U_{j'j'} a_{i'j'})^{\mu} \right\} \\ \times \Delta_+(U_{jj} a_{ij} + U_{j'j'} a_{i'j'})$$

Wobei der Vorfaktor $\tilde{c}_{t_m, n, N} = (i2(2\pi)^3)^{t_m/2} c_{n, N}$ ist. Die Summanden mit mehreren Deltafunktionen schreiben sich dann als

$$\begin{aligned} K_{t_m, \lambda}^{J\bullet}(k_{11}, \dots, \widehat{k_{ij_1}}, \widehat{k_{i'j'_1}}, \dots, \widehat{k_{ij_{t_m/2}}}, \widehat{k_{i'j'_{t_m/2}}}, \dots, k_{nN}) = \\ = \tilde{c}_{t_m, n, N} \int_{\mathbb{R}^{4nN}} d\underline{a}_1 \dots d\underline{a}_N \left(\prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\underline{a}_{M+1} - \underline{a}_M)) \right) G_\lambda(\underline{a}_1) \dots G_\lambda(\underline{a}_N) \\ \times \exp \left\{ i \sum_{M=1}^N \underline{k}_{M\mu} \cdot (U_M \underline{a}_M^\mu) - i \sum_{\{(ij, i'j')\}} (k_{ij_\mu} (U_{jj} a_{ij})^\mu + k_{i'j'_\mu} (U_{j'j'} a_{i'j'})^\mu) \right\} \\ \times \prod_{\{(ij, i'j')\}} \Delta_+(U_{jj} a_{ij} + U_{j'j'} a_{i'j'}) \end{aligned}$$

Mit $\{(ij, i'j')\}$ ist die Menge aller Paare $(ij, i'j')$ gemeint. Zur besseren Übersicht wenden wir den Basiswechsel (2.4.8) auf das Ergebnis an. Für ein einheitliches Bild müssen die a_{ij} ebenfalls transformiert werden, wobei noch zu beachten ist, dass die Matrixelemente U_{jj} zu den $U_{j'j'}$ wegen der Kommutatoren (2.4.6) immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wähle die Basis so, dass

$$a_{i_M} \rightarrow a_{i_M}(b_1, \dots, b_r, b_{r+1} \dots, b_{r+s}, b_{r+s} \dots, b_{r+s+t}) \quad (2.4.14)$$

r, s, t seien wie in (2.4.8) gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} K_{t_m, \lambda}^{J\bullet}(\mathbf{p}_{1m}, \dots, \mathbf{p}_{r_m}, \mathbf{p}_{r_m+1}, \dots, \mathbf{p}_{r_m+s_m}) = \tilde{c}_{t_m, n, N} \int_{\mathbb{R}^{4(r_m+s_m+t_m)}} db_{1m} \dots db_{r_m+s_m+t_m} \\ \times \prod_{1 \leq M < N} \theta(\kappa^0(\underline{a}_{M+1}(b_{1m}, \dots, b_{r_m+s_m+t_m}) - \underline{a}_M(b_{1m}, \dots, b_{r_m+s_m+t_m}))) \\ \times G_\lambda(\underline{a}_1(b_{1m}, \dots, b_{r_m+s_m+t_m})) \dots G_\lambda(\underline{a}_N(b_{1m}, \dots, b_{r_m+s_m+t_m})) \\ \times \exp \left\{ i \sum_{i=1_m}^{r_m} p_{i_\mu} \cdot b_i^\mu - i \sum_{i=r_m+1}^{r_m+s_m} p_{i_\mu} b_i^\mu \right\} \prod_{\substack{i=1 \\ i \in 2\mathbb{N}+1}}^{t_m/2} \Delta_+(b_{r_m+s_m+i} - b_{r_m+s_m+i+1}) \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Die Frage ist nun, ob $K_{t_m, \lambda}^{J\bullet}$ noch eine Schwartzfunktion ist und ob die Multiplikation der Propagatoren mit den Heavisidefunktionen und den Feldoperatoren überhaupt wohldefiniert ist. Tatsächlich sind diese Anforderungen erfüllt, allerdings nur solange $\lambda(\kappa(\underline{a}))$ eine Schwartzfunktion ist. Da jeder Propagator nur einmal auftreten kann, ist die Multiplikation mit den Heavisidefunktionen wohldefiniert [11]. An dieser Stelle genügt es zu zeigen, dass die Gaußfunktion zusammen mit der Schwartzfunktion $\lambda(\kappa(\underline{a}))$ als Testfunktion für die Propagatoren ausreichend sind. Die Gaußfunktion alleine ist nicht hinreichend. Da sie nur von den relativen Koordinaten $a_{i_M} - \kappa(\underline{a}_M)$ abhängig ist, lässt sich eine Koordinatentransformation wie in Bemerkung 2.4.1 durchführen. Das bedeutet, dass sie von einer Integrationsvariablen unabhängig wird und in dieser Variablen dem auftretenden Propagator nicht mehr als Testfunktion dienen kann. Da nun aber $\kappa(\underline{a}_M)$ linear unabhängig von $(a_{i_M} - \kappa(\underline{a}_M))$ für alle i ist – betrachtet als Vektoren in $\mathbb{R}^{4n}$ – bilden die Funktionen $\lambda(\kappa(\underline{a}_M))$ multipliziert mit den

Gaußfunktionen eine Testfunktion in $\mathbb{R}^{4nN}$. Der Kern $K_{t_m, \lambda}^{J_\bullet}$ ist also eine Schwartzfunktion und somit ist

$$W_{t_m, \lambda}^{J_\bullet}(\mathbf{p}_{1_m}, \dots, \mathbf{p}_{r_m+s_m}) := \frac{K_{t_m, \lambda}^{J_\bullet}(\mathbf{p}_{1_m}, \dots, \mathbf{p}_{r_m+s_m})}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_{1_m}), \dots, \omega(\mathbf{p}_{r_m+s_m})}}$$

in $L^2(\mathbb{R}^{3(r_m+s_m)})$

□

Es folgt dass die S -Matrix in jedem Term endlich ist und keine Ultraviolettdivergenzen auftreten, was Proposition 2.3.8 beweist.

2.5 Graphentheorie für gemittelte Ereignisse

Im Hinblick auf das nächste Kapitel soll nun gezeigt werden, wie man mithilfe der eingeführten S -Matrix Graphentheorie betreiben kann. Die zentrale Rolle kommt hierbei der sogenannten Gell-Mann & Low Formel zu,

$$G_{[\lambda]} = \frac{S[\lambda]}{\langle S[\lambda] \rangle_0}$$

die zunächst rein quantenmechanisch erklärt ist. Mit $\langle \cdot \rangle_0$ ist der Vakuumerwartungswert gemeint. An dieser Stelle unterstellen wir der Theorie die LSZ-Asymptotik und erinnern uns daran, dass die gewöhnliche Quantenfeldtheorie im Limes $\lambda_{\mathbf{p}} \rightarrow 0$ – also für große Abstände beziehungsweise große Zeiten im Vergleich zur Plancklänge – zurückgewonnen wird.

Für die Auswertung der Gell-Mann & Low Formel benötigen wir den Begriff des zeitgeordneten Produktes. Der letzte Abschnitt zeigt, dass der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator nur von der gemittelten Zeit t abhängt. Somit kann die Zeitordnung auch nur diese Mittelung respektieren. Die Wickschen Theoreme lassen sich dennoch formulieren und damit auch Feynmanregeln. In [11] und [13] sind Feynmanregeln für eine allgemeine Wechselwirkung mit nichtlokalem Integralkern auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum angegeben und in [13] die sogenannten verallgemeinerten Wickschen Theoreme eingeführt. Eine Version für allgemeine verschmierte Feldoperatoren in einer nichtkommutativen Quantenfeldtheorie ist in [23] und [24] zu finden. In unserem Model zeigt es sich, dass mit wenigen Modifikationen die Beweise der herkömmlichen lokalen Quantenfeldtheorie direkt übernommen werden können. Ein Hauptmerkmal dieser Eigenschaft ist, dass die Akausalität der Theorie hier keinen Einfluss auf die Wickschen Theoreme hat.

Im Falle für $n = 1$ kann man sofort das zeitgeordnete Produkt angeben, da hier die Theorie der regulären Feldmonome mit der herkömmlichen Theorie übereinstimmt. Sei also $T^{\{t_1, \dots, t_k\}}$ der Zeitentwicklungsoperator bezüglich der Zeiten $t_1, \dots, t_k$ dann ist die Zeitordnung gegeben durch

$$\begin{aligned} T^{\{t_1, \dots, t_k\}}[\phi(x_1) \dots \phi(x_k)] &= \\ &= \sum_{\pi} \theta(t_{\pi(1)} - t_{\pi(2)}) \phi(x_{\pi(1)}) \dots \theta(t_{\pi(k-1)} - t_{\pi(k)}) \phi(x_{\pi(k-1)}) \phi(x_{\pi(k)}) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

In [13] sind die Zeiten $t_1, \dots, t_k$ zunächst vollkommen unabhängig von den x^0 -Komponenten der Felder, was die Akausalität der nichtkommutativen Theorie widerspiegelt. Ähnlich dazu werden im Fall der regulären Feldmonome die t_i zu gemittelten Zeiten, was sich natürlich für $n = 1$ erübrigt. Das bedeutet aber auch, dass die Akausalität oder das nichtlokale Verhalten an den Vertizes entsteht – beziehungsweise in der Zeitentwicklung für die regulären Wickmonome $:\phi_R^{(n)}(x):$ mit $n \geq 2$. Dies ist eine direkte Folge davon, dass der nichtlokale Integralkern $\tilde{r}_n$ ebenfalls zeitgeordnet wird. Die Kontraktionen ist definiert durch

$$\begin{aligned} T^{\{t_1, \dots, t_k\}}[\phi(x_1) \dots \underbrace{\phi(x_i) \dots \phi(x_j)} \dots \phi(x_k)] = \\ = \mathcal{D}(x_i - x_j, t_i - t_j) T^{\{t_1, \dots, \widehat{t_i}, \dots, \widehat{t_j}, \dots, t_k\}}[\phi(x_1) \dots \widehat{\phi(x_i)} \dots \widehat{\phi(x_j)} \dots \phi(x_k)] \end{aligned}$$

wobei der Hut über den Variablen bedeutet, dass diese fehlen und $\mathcal{D}(x, t) = -i[\Delta_+(x) \theta(t) + \Delta_+(-x) \theta(-t)]$ der verallgemeinerte Propagator ist (für t_i wie oben erklärt). Eine Verallgemeinerung wird nun erreicht, indem man gemischte Produkte der Felder $\phi(x_i)$ und $:\phi_R^{(n)}(x_i):$ in (2.5.1) betrachtet. Im Limes $\lambda \mathbf{p} \rightarrow 0$ bekommt man anstatt $\mathcal{D}(x, t)$, den gewöhnlichen kausalen Propagator $\mathcal{D}(x)$, da dann $:\phi_R^{(n)}(x): \rightarrow :\phi^n(x):$ gilt. Die Schlussfolgerung aus [13] ist, dass mit diesen Modifikationen die Wickschen Theoreme gelten, insbesondere das über das T -Produkt von normalgeordneten linearen Feldoperatoren. Betrachten wir als Beispiel folgende Situation für eine ϕ_R^3 -Wechselwirkung ($x^0 = t$):

$$\begin{aligned} \int dx_2 dx_3 T^{\{t_1, t_2, t_3, t_4\}}[\phi(x_1) \lambda(x_2) :\phi_R^{(3)}(x_2): \lambda(x_3) :\phi_R^{(3)}(x_3): \phi(x_4)] = \\ = \int da_1 da_2 da_3 db_1 db_2 db_3 \int dx_2 dx_3 T^{\{t_1, t_2, t_3, t_4\}}[\phi(x_1) \lambda(x_2) \tilde{r}_3(x_2 - a_1, x_2 - a_2, x_2 - a_3,) \\ :\phi(a_1) \phi(a_2) \phi(a_3): \lambda(x_3) \tilde{r}_3(x_3 - b_1, x_3 - b_2, x_3 - b_3,) :\phi(b_1) \phi(b_2) \phi(b_3): \phi(x_4)] \end{aligned}$$

mit $\kappa(\underline{a}) = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ und $\kappa(\underline{b})$ entsprechend gilt

$$\begin{aligned} = \int da_1 da_2 da_3 db_1 db_2 db_3 T^{\{t_1, \kappa(\underline{a}^0), \kappa(\underline{b}^0), t_4\}}[\phi(x_1) \lambda(\kappa(\underline{a})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |a_i - \kappa(\underline{a})|^2} :\phi(a_1) \phi(a_2) \phi(a_3): \\ \lambda(\kappa(\underline{b})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |b_i - \kappa(\underline{b})|^2} :\phi(b_1) \phi(b_2) \phi(b_3): \phi(x_4)] \end{aligned}$$

Dieses Beispiel verdeutlicht, wie die Zeitordnung für die gemittelten Zeiten der Vertizes entsteht. Die Kontraktion ist dann erklärt. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} T^{\{t_1, \kappa(\underline{a}^0), \kappa(\underline{b}^0), t_4\}}[\underbrace{\phi(x_1) :\phi(a_1) \phi(a_2) \phi(a_3):}_{\lambda(\kappa(\underline{a})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |a_i - \kappa(\underline{a})|^2}} \lambda(\kappa(\underline{a})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |a_i - \kappa(\underline{a})|^2} \\ \lambda(\kappa(\underline{b})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |b_i - \kappa(\underline{b})|^2} :\phi(b_1) \phi(b_2) \phi(b_3): \phi(x_4)] = \\ = \mathcal{D}(x_1 - a_2, t_1 - \kappa(\underline{a}^0)) T^{\{\kappa(\underline{a}^0), \kappa(\underline{b}^0), t_4\}}[\lambda(\kappa(\underline{a})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |a_i - \kappa(\underline{a})|^2} :\phi(a_1) \phi(a_3): \\ \lambda(\kappa(\underline{b})) e^{-\frac{1}{2} \sum_i |b_i - \kappa(\underline{b})|^2} :\phi(b_1) \phi(b_2) \phi(b_3): \phi(x_4)] \end{aligned}$$

Das zweite Wicksche Theorem bedeutet hierbei wie gewöhnlich, dass die Kontraktionen innerhalb eines normalgeordneten Produktes wegzulassen sind, die Vakuumblasen (tadpoles) sind damit ausgeschlossen. Nach diesen Veranschaulichungen lassen sich nun auch Feynmanregeln formulieren, indem wir die Gell-Mann & Low Formel mithilfe der Wickschen Theoreme formal lösen und in Form von Graphen Prozesse assoziieren:

$$G_k^\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\langle S[\lambda] \rangle_0} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i)^N}{N!} \int dy_1 \dots dy_N \langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_k) \lambda(y_1) \mathcal{L}_{\text{eff}}(y_1) \dots \lambda(y_N) \mathcal{L}_{\text{eff}}(y_N)] | 0 \rangle$$

Man beachte, dass die Kopplungskonstante λ wie in den vorherigen Abschnitten zu einer Schwartzfunktion $\lambda(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ umgeschrieben wird, um die Wechselwirkung auf ein Raumzeitgebiet einzuschränken. Mit Hilfe der Feynmanregeln kann dann versucht werden, das Verhalten der Prozesse (Graphen) im Limes $\lambda(\cdot) \rightarrow \lambda$ zu untersuchen (Infrarotlimes). Wir formulieren deshalb die Feynmanregeln [13] wie folgt:

Bemerkung 2.5.1. Die Feynmanregeln für eine $\phi_R^{(n)}$ -Wechselwirkung lauten:

- (i) Zeichne alle möglichen Feynmangraphen des zu beschreibenden Prozesses, indem in den klassischen Graphen die gewöhnlichen Vertizes durch fette Vertizes ersetzt werden. Diese sind so zu zeichnen, dass eine gestrichelte Linie um die n verschiedenen Punkte (in einer ϕ^n -Wechselwirkung) eines Vertex herum die Zugehörigkeit zum selbigen symbolisiert und damit die Mittelung beziehungsweise die Gaußverschmierung darstellt. Der Prozess zur Ordnung N ist bestimmt durch N -Vertizes in N -ter Ordnung Störungstheorie und den externen Punkten (ein- und auslaufende Teilchen).
- (ii) Ordne jedem externen Punkt eines bestimmten Graphen einen ausgezeichneten Vierervektor x_l mit $l \in \{1, \dots, k\}$ zu. Ordne ebenfalls jedem fetten Vertex eines bestimmten Graphen einen ausgezeichneten Vierervektor y_j mit $j \in \{1, \dots, N\}$ zu und jedem internen Punkt einen Vierervektor a_{ij} mit $i \in \{1, \dots, n\}$. Schreibe dann für jeden Vertex ein Integral der Form

$$\frac{ic_n}{n^4 n!} \int_{\mathbb{R}^{4(n+1)}} da_{1j} \dots da_{nj} dy_j \delta^{(4)}(y_j - \kappa(\underline{a}_j)) \lambda(y_j) e^{-\frac{1}{2}|y_j - \underline{a}_j|^2}$$

- (iii) Für jede Linie, die zwei äußere Punkte x_l und x_k verbindet, multipliziere mit

$$\mathcal{D}(x_l - x_k) = \frac{1}{i} [\Delta_+(x_l - x_k) \theta(x_l^0 - x_k^0) + \Delta_+(x_k - x_l) \theta(x_k^0 - x_l^0)] .$$

Dieser Faktor stimmt mit dem Stückelberg-Feynman Propagator überein.

- (iv) Für jede Linie, die einen externen Punkt x_l mit einem internen Punkt a_{ij} eines Vertex y_j verbindet, multipliziere unter dem Integral aus Punkt (ii) mit

$$\mathcal{D}(x_l - a_{ij}, x_l^0 - y_j^0) = \frac{1}{i} [\Delta_+(x_l - a_{ij}) \theta(x_l^0 - y_j^0) + \Delta_+(a_{ij} - x_l) \theta(y_j^0 - x_l^0)] .$$

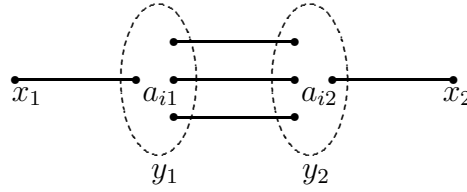
Jeder interne Punkt ist nur einmal zu verwenden.

- (v) Für jede Linie, die einen internen Punkt a_{ij} eines Vertex y_j mit einem internen Punkt a_{nm} eines Vertex y_m verbindet, multipliziere unter dem Integral (ii) mit

$$\mathcal{D}(a_{ij} - a_{nm}, y_j^0 - y_m^0) = \frac{1}{i} [\Delta_+(a_{ij} - a_{nm})\theta(y_j^0 - y_m^0) + \Delta_+(a_{nm} - a_{ij})\theta(y_m^0 - y_j^0)] .$$

Auch hier gilt: jeder interne Punkt ist nur einmal zu verwenden.

Hier nun als Beispiel, wie der Nuss-Graph (setting-sun-Graph) der regularisierten $\phi_R^{(4)}$ -Theorie zu zeichnen ist:



Man beachte, dass die Punkte eines Vertex im ganzen Raum verteilt sein können, denn nur die Mittelung über alle Punkte legt die Zeitordnung der gesamten Wechselwirkung fest.

Mit diesen Regeln lässt sich die Gell-Mann & Low Formel durch Feynmangraphen beschreiben

$$G_k^\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\langle S \rangle_0} \sum_{\gamma} (n!)^{v(\gamma)} I_\gamma^\lambda(x_1, \dots, x_k)$$

wobei $v(\gamma)$ die Anzahl der Vertizes des Graphen γ ist und I_γ^λ das Integral, gegeben durch die Feynmanregel (i) bis (v), darstellt. Auch hier faktorisieren die Graphen wie in der herkömmlichen Theorie und die für die Theorie uninteressanten Vakuum-Vakuum Prozesse können herausdividiert werden mit dem Faktor $1/\langle S \rangle_0$, der genau diese Graphen beinhaltet. An dieser Stelle soll noch etwas über die Kombinatorik gesagt werden. Die Wechselwirkung ist in den internen Koordinaten a_{ij} symmetrisch per Konstruktion, insbesondere natürlich der Kern $\tilde{r}_n$. Die Möglichkeit Kontraktionen zu bilden unterscheidet sich demnach nicht von der gewöhnlichen Theorie. Das führt dazu, dass die kombinatorischen Faktoren die gleichen sind, wie in einer normalen skalaren ϕ^n Wechselwirkung.

Mit Hilfe der Feynmanregeln studieren wir im nächsten Kapitel das Infrarotverhalten der effektiven Theorie. Insbesondere betrachten wir explizit spezielle divergente Graphen und erörtern die Frage der Renormierung.

Kapitel 3

Infrarotverhalten der effektiven Theorie

Die Vorarbeiten der letzten Abschnitte ermöglichen es uns nun, das Verhalten der effektiven, ultraviolett-endlichen Quantenfeldtheorie auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum anhand verschiedener Prozesse genauer zu untersuchen. Im Mittelpunkt steht das Infrarotverhalten der Theorie, der adiabatische Limes $\lambda(\cdot) \rightarrow \textit{konstant}$. Es zeigt sich hierbei, dass Probleme auftauchen, die bereits aus der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie bekannt sind. So divergieren die sogenannten 1PI-Graphen¹, die mehr als einen Vertex besitzen, aufgrund der Tatsache, dass die Masse in den (verallgemeinerten) Propagatoren der inneren Linien auf der Massenschale liegt. Diesem Sachverhalt begegnet man in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie mit der Renormierung der Masse [6]. Man postuliert, dass sich die Massen bei den inneren Propagatoren von den physikalischen Massen unterscheiden, folglich nicht die gleiche Massenschale besetzen. Die Idee ist nun, dass wir diese Interpretation auf unsere Theorie anwenden können [11]. Renormiert man die Massen entsprechend, so sollten damit die Divergenzen, die im infraroten Bereich auftreten, beseitigt sein. Das soll in den darauffolgenden Abschnitten erörtert werden. Im ersten Abschnitt werden im Wesentlichen die Resultate aus [11, Section 3.3] vorgestellt, um im nächsten Abschnitt mit der Renormierung an die Diskussion anzuknüpfen. Wenden wir uns somit etwas präziseren Erörterungen des Infrarot-Problems zu.

Bemerkung 3.0.2. Der Vakuumerwartungswert der S -Matrix aus Definition 2.3.5 divergiert im adiabatischen Limes $\lambda(\cdot) \rightarrow \textit{konstant}$.

Der Beweis beruht auf der Tatsache, dass die Gaußkerne in der effektiven S -Matrix keine Testfunktion im $\mathbb{R}^{4n}$ bilden, da man sie von Integrationsvariablen unabhängig machen kann. Es sei daran erinnert, dass dies eine Konsequenz von Beziehung (2.2.1) ist – der n -fachen Lokalisierung der relativen Quanten-Koordinaten q_{ij} . Man wählt die Kopplungskonstante unter anderem auch deshalb als eine Schwartzfunktion $\lambda(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, um diesen Defekt der

¹Mit 1PI-Graphen sind eiteilchen-irreduzible Graphen gemeint. Das sind diejenigen, die nicht in zwei Graphen zerfallen, wenn man eine Linie entfernt (bzw. durchschneidet). Mit 1PR-Graphen sind eiteilchen-reduzible Graphen gemeint. Das sind diejenigen, die in zwei Graphen zerfallen, wenn man eine Linie aus dem Graphen entfernt (bzw. durchschneidet).

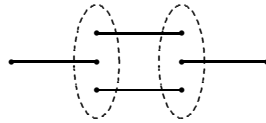
Theorie vorerst zu kompensieren.

Beweis. Beim Vakuum Erwartungswert sind alle Felder kontrahiert, denn Terme mit nichtkontrahierten Feldern ergeben wie gewöhnlich Null wegen der zugrundeliegenden Normalordnung. Man bekommt demnach folgendes Integral aus Gleichung (2.4.7) ($r = s = 0$ und $t = nN$):

$$\int_{\mathbb{R}^{3t}} d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_t \frac{K_{\lambda}^{J\bullet}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_t)}{\sqrt{\omega(\mathbf{p}_1) \dots \omega(\mathbf{p}_t)}} \prod_{i=1}^{t-1} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}) \quad (3.0.1)$$

Hierbei ist $K_{\lambda}^{J\bullet}$ bestimmt durch Gleichung (2.4.12) (mit $\lambda(y) = \lambda'(t) \otimes \lambda''(\mathbf{y})$). Der räumliche Anteil in (2.4.12) ergibt bei $\lambda''(\mathbf{y}) = \text{konstant } N$ Deltadistributionen, die die Dreier-Impulserhaltung an den Vertizes darstellen. Führt man nun $nN/2$ Integrationen durch, so kommen wir in die Situation, dass durch die Impulserhaltung N Deltafunktionen mit paarweise gleichem Argument auftauchen. Das ist aber nach Lemma 2.4.2 nicht definiert. Somit divergiert der Vakuum Erwartungswert. Das zeitliche Integral in (2.4.12) divergiert ebenfalls, wenn man $\lambda'(t) = \text{konstant}$ setzt: Betrachtet man dafür die Darstellung der Heavisidefunktion $\theta(x) = (2\pi i)^{-1} \int d\alpha (\alpha - i\epsilon)^{-1} \exp\{i\alpha x\}$, so führt die Anwendung des Residuensatzes zu Termen, die beim Ausführen der $nN/2$ Integrationen ebenfalls nicht mehr definiert sind. $\square$

Vakuumgraphen, insbesondere die Vakuum-Vakuum Graphen in höherer Ordnung Störungstheorie, divergieren somit im adiabatischen Limes. Das begründet den Ansatz der Normalordnung in der Gell-Mann & Low Formel. Nun zeigt sich aber, dass dies nicht die einzigen divergenten Graphen sind, sondern es eine weitere Klasse von Graphen gibt, die im adiabatischen Limes divergieren. Das sind die 1PI-Graphen, die aus Vertizes bestehen, die durch innere Propagatoren miteinander verbunden sind. Betrachten wir als Beispiel² den einfachsten Graphen mit inneren Linien einer $\phi_R^{(3)}$ -Theorie bei $\lambda(x) = \lambda = \text{konstant}$, den einfachsten Selbstenergiegraphen:



Mit den Feynmanregeln aus Bemerkung 2.5.1 erhält man zunächst den Ausdruck:

$$\left(\frac{i\lambda c_3}{3^4 3!}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^{32}} d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 dy_1 dy_2 \prod_{i=1}^2 \delta^{(4)}(y_i - \kappa(\mathbf{a}_i)) e^{-\frac{1}{2}|y_i - \mathbf{a}_i|^2} \mathcal{D}(x_1 - y_1, x^0 - y^0) \mathcal{D}(y_2 - x_2, y_2^0 - x_2^0) \\ \mathcal{D}(y_1 - y_2, y_1^0 - y_2^0) \mathcal{D}(y_1 - y_2, y_1^0 - y_2^0)$$

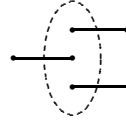
Wertet man dieses Integral aus, so hat der typische Term folgende Gestalt (Gleichung A.2.3

²Wir berechnen die Graphen später explizit: Abschnitt 3.1 und Anhang A.

im Anhang):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2}} (2\pi)^{14} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2}} e^{iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2} \\ & \times \left[e^{-\frac{1}{18}|2q_1 - k_1 - k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1 + q_1 - k_2|^2} \dots e^{-\frac{1}{18}|2q_2 + k_1 + k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1 + q_2 - k_2|^2} \dots \right] \\ & \times \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \left[\frac{e^{i(\omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}_1})t_1} e^{i(\omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}_1})(t_2 - t_1)}}{(\omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2})(\omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}_1})} + \dots \right] \end{aligned}$$

Wertet man jetzt die Deltadistributionen aus, so ergibt der Nenner in der letzten Zeile Null und der gesamte Ausdruck ist nicht mehr definiert. Im Gegensatz dazu der einfachste Graph einer $\phi_R^{(3)}$ -Theorie ohne innere Linien:



Dieser Graph bleibt endlich, denn man erhält als typischen Term (Gleichung A.3.1 im Anhang):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)) e^{-\frac{1}{18}|2q_1 + q_2 + q_3|^2} e^{-\frac{1}{18}|2q_2 + q_1 + q_3|^2} e^{-\frac{1}{18}|2q_3 + q_1 + q_2|^2} \\ & \left[-\frac{2e^{i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_1}}{-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3}} + \frac{e^{i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_2}}{-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3}} + \frac{e^{i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_3}}{-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3}} \right] \end{aligned}$$

Das Integral ist definiert, wenn die Deltadistribution ausgeführt wird, denn es gilt die Abschätzung $0 < \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3} - \omega_{\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3}$, wobei $m > 0$ beliebig gewählt werden kann. Nun geht der Nenner asymptotisch gegen Null für große Impulse (vergl. Proposition 3.1.2). Da aber die Gaußfunktionen in diesem Bereich schneller abfallen als jedes Polynom, ist der gesamte Ausdruck wohldefiniert. Motiviert durch die obige Diskussion nun eine

Bemerkung 3.0.3. Sei Γ ein eiteilchen-reduzierbarer Graph, $\gamma_1 \dots \gamma_k$ die eiteilchen-irreduzierbaren Teilgraphen von Γ . Es sei mindestens einer unter den 1PI-Teilgraphen, der aus Vertices besteht, die durch innere Linien miteinander verbunden sind. Dann divergiert der gesamte Graph im adiabatischen Limes. Wählt man jedoch $\lambda'(t) \otimes \lambda''(\mathbf{y}) \rightarrow \lambda'(t) \lambda_S$, das heißt nur der räumliche Teil sei konstant ($\lambda''(\mathbf{y}) \equiv \lambda_S \equiv \text{konstant}$), so bleibt der Graph endlich.

Man kann sich den 1PR-Graphen aus den 1PI-Graphen zusammengesetzt vorstellen. Die Divergenzen der 1PI-Graphen mit inneren Linien übertragen sich dann auf den gesamten Graphen. Für einen allgemeinen Erwartungswert der S -Matrix mit äußeren Feldern, gilt die

Proposition 3.0.4. *Die Erwartungswerte der einzelnen Terme der S -Matrix mit äußeren Feldern – ohne Vakuumgraphen – bleiben endlich, wenn der adiabatische Limes nur über den räumlichen Anteil durchgeführt wird, das heißt für $\lambda'(t) \otimes \lambda''(\mathbf{y}) \rightarrow \lambda'(t) \lambda_S$ mit $\lambda_S = \text{konstant}$ [11]. Für Erwartungswerte ohne äußere Felder gilt Bemerkung 3.0.2.*

Der Beweis [11] dieser Proposition soll hier der Vollständigkeit halber angegeben werden:

Beweis. Sei N die Anzahl der Vertizes, n die Anzahl der inneren Punkte der Vertizes und sei b die Anzahl der inneren Linien (Propagatoren). Die Anzahl der äußeren Linien ist gegeben durch $l = n \cdot N - 2b \neq 0$. Für das richtige Vorzeichen der Impulse sei $u_i = \pm$, je nachdem wie die Zeitordnung in dem entsprechenden Term gewählt wurde – einlaufende und auslaufende Impulse haben entgegengesetztes Vorzeichen. Der allgemeine Erwartungswert hat dann die Form

$$\begin{aligned} & \tilde{c} \int \prod_{i=1}^l \frac{d\mathbf{q}_i}{2\omega_{\mathbf{q}_i}} e^{iu_i q_i x_i} \prod_{j=1}^b \frac{d\mathbf{k}_j}{2\omega_{\mathbf{k}_j}} e^{-\frac{1}{2}|q_i - \frac{1}{n}(q_i + \sum_{s=1}^b k_s)|^2} e^{-\frac{1}{2}|k_j - \frac{1}{n}(q_i + \sum_{s=1}^b k_s)|^2} \left\{ \right. \\ & \quad \times \prod_{s=1}^N \delta^{(3)} \left(\sum_{l \in L_s} u_l \mathbf{q}_l - \left(\sum_{m \in I_s} \mathbf{k}_m - \sum_{r \in J_s} \mathbf{k}_r \right) \right) \\ & \quad \times \underbrace{\int \prod_{s=1}^N d\beta_s^0 \lambda(\beta_s^0) \prod_{l \in L_s} e^{i(u_l \mathbf{q}_l - (\sum_{m \in I_s} \mathbf{k}_m - \sum_{r \in J_s} \mathbf{k}_r) \beta_l^s)} \cdot (\text{Thetafunktionen})}_{\text{durch } \lambda(\beta_s^0) \text{ beschränkte Funktion}} \left. \right\} \end{aligned}$$

Wobei $\cup_{s=1}^N I_s = \cup_{s=1}^N J_s = \{1, \dots, b\}$, $I_s \cap J_s = \emptyset$, $J_s \cap J_{s'} = \emptyset = I_s \cap I_{s'}$, $\cup_{s=1}^N L_s = \{1, \dots, l\}$ und $|I_s| + |J_s| + |L_s| = n$. Das gewährleistet nun, dass die Argumente der Deltadistributionen im Produkt immer verschieden sind und somit nach Bemerkung 2.4.2 wohldefiniert, solange die Integrationen über die Zeiten beschränkte Funktionen bilden. Das ist gegeben, sofern $\lambda(\beta_i^0)$ eine Schwartzfunktion ist. Der gesamte Ausdruck bleibt dadurch endlich. $\square$

Die obige Diskussion verdeutlicht, dass die Infrarotdivergenzen immer dann auftauchen, wenn ein Graph Vertizes besitzt, die durch mehrere innere Propagatoren (Linien) miteinander verbunden sind. Als Grund hierfür nehmen wir an, wie bereits erwähnt, dass deren Massen noch auf der Massenschale liegen. Dieses Problem soll nun im nächsten Abschnitt angegangen werden.

3.1 Renormierung der effektiven Theorie

Die grundlegende Idee der Renormierung in der Quantenfeldtheorie stammt aus der Beobachtung, dass die sogenannten 1-Loop Graphen die Parameter in der Wirkung deformieren. Wir nehmen in unserem Fall an, dass sich die endliche, physikalische Masse $\tilde{m}$ zu einer (nackten) Masse m verschiebt. Die Renormierung besteht nun darin, die Divergenzen, die in diesen Termen auftauchen, mit den sogenannten Kontertermen (Gegenterme) aufzuheben. Die Standardprozedur ist hierbei, dass man eine Massenrenormierung vollzieht, indem die Selbstenergiegraphen aufsummiert werden und anschließend die renormierte Greensfunktion bestimmt wird. Das Ergebnis sind die sogenannten Skelettgraphen, bei denen dann der adiabatische Limes endlich sein sollte. Nun ist die effektive Theorie, die wir betrachten, nicht lorentzinvariant und somit ist anzunehmen [11], dass die Renormierung und deren Ergebnis ebenfalls ein festes Lorentz-Bezugssystem auszeichnen. Theorien mit diesen Eigenschaften führen zu

Verzerrungen der Dispersionsrelation. Interessant wird dies dann, wenn man experimentell Einschränkungen für die Nichtkommutativität durch dieses Phänomen festlegen kann – das heißt eine obere Schranke für den Parameter λ_P , der nicht zwingend als die Plancklänge gewählt werden muss.

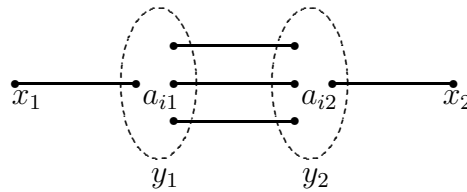
Eine Bedingung für die Renormierbarkeit ist, dass nur endlich viele Graphen (oberflächlich) divergieren [25]. Unsere Theorie ist endlich zu jeder Ordnung – bis auf den adiabatischen Limes – und daher per Konstruktion renormierbar. Kommen wir deshalb zu einer etwas genaueren Untersuchung der Renormierung in unserer Theorie.

In der herkömmlichen Quantenfeldtheorie betrachtet man die Zweipunktfunktion als Summe über die Selbstenergiegraphen, welche eine geometrische Reihe formen.

$$\begin{aligned} \int dx dy \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle e^{ik(x-y)} &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \underbrace{\frac{i}{p^2 - m_0^2} iM^2(p^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots}_{\text{reguläre Terme bei } p^2=m^2} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)} \end{aligned}$$

Wobei der Faktor $iM^2(p^2) := \sum(1PI - \text{Graphen})$ ist. Die zur nackten Masse m verschobene, physikalische Masse ist durch $\tilde{m} := m + \delta m$ mit $\delta m := \lim_{p \rightarrow 0} iM^2(p^2)$ definiert. Die Massenrenormierung reduziert sich somit auf die Frage der Möglichkeit die Selbstenergiebeiträge zu berechnen. Die auf diese Weise renormierte Wirkung bleibt lorentzinvariant.

In Analogie dazu kann nun versucht werden, ein ähnliches Resultat für unsere Theorie zu bekommen. Es stellt sich aber heraus, dass die Methoden zur Berechnung der Selbstenergiebeiträge, wie sie in der herkömmlichen Theorie benutzt werden, aufgrund der Kausalitätsverletzung in unserem Modell versagen. Diesen Sachverhalt veranschaulichen wir mit einem Beispiel aus der effektiven $\phi_R^{(4)}$ -Theorie und betrachten dazu zunächst den Selbstenergiegraphen $\Gamma(t_1, \mathbf{x}_1, t_2, \mathbf{x}_2)$

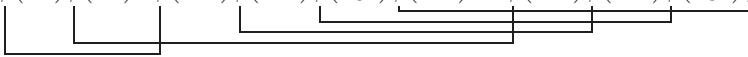


in zweiter Ordnung Störungstheorie. Die Kopplung setzen wir zunächst konstant $\lambda(x) \equiv \lambda \equiv \text{konstant}$. Dann gilt mit den Feynmanregeln aus Bemerkung 2.5.1:

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, \mathbf{x}_1, t_2, \mathbf{x}_2) &= \int_{\mathbb{R}^{32}} d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 \int_{\mathbb{R}^8} dy_1 dy_2 \delta^{(4)}(4y_1 - \sum_{i=1}^4 a_{i1}) \delta^{(4)}(4y_2 - \sum_{i=1}^4 a_{i2}) \quad (3.1.1) \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2}|y_1 - \mathbf{a}_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|y_2 - \mathbf{a}_2|^2} \cdot \tilde{\Gamma}(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \end{aligned}$$

Sei $\tilde{\Gamma}(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) :=$ Kontraktionen. Nun können wir uns auf eine spezielle Wahl der Kontraktion beschränken. Alle verbleibenden Möglichkeiten, Felder zu kontrahieren, ergeben

den selben Wert und somit nur einen kombinatorischen Faktor. Dieser bestimmt sich offensichtlich wie in der gewöhnlichen ϕ^4 -Theorie (vergleiche Abschnitt 2.5). Wir wählen somit unsere spezielle Kontraktion als:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0, \underline{a}_1, \underline{a}_2) = \\ = \langle 0 | T^{\{t_1, t_2, y_1^0, y_2^0\}} \left[\phi(x_1) \phi(x_2) : \phi(a_{11}) \phi(a_{21}) \phi(a_{31}) \phi(a_{41}) : : \phi(a_{12}) \phi(a_{22}) \phi(a_{32}) \phi(a_{42}) : \right] | 0 \rangle \end{aligned}$$


Mit den Feynmanregeln 2.5.1 ist das gleich:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0, \underline{a}_1, \underline{a}_2) = \mathcal{D}(a_{11} - x_1, y_1^0 - t_1) \mathcal{D}(x_2 - a_{12}, t_2 - y_2^0) \\ \mathcal{D}(a_{22} - a_{21}, y_2^0 - y_1^0) \mathcal{D}(a_{32} - a_{31}, y_2^0 - y_1^0) \\ \mathcal{D}(a_{42} - a_{41}, y_2^0 - y_1^0) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Ausgeschrieben hat man:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0, \underline{a}_1, \underline{a}_2) = & \left[\frac{1}{i} (\Delta_+(a_{11} - x_1) \theta(y_1^0 - t_1) + \Delta_+(x_1 - a_{11}) \theta(t_1 - y_1^0)) \right] (3.1.3) \\ & \times \left[\frac{1}{i} (\Delta_+(x_2 - a_{12}) \theta(t_2 - y_2^0) + \Delta_+(a_{12} - x_2) \theta(y_2^0 - t_2)) \right] \\ & \times \left[\frac{1}{i} (\Delta_+(a_{22} - a_{21}) \theta(y_2^0 - y_1^0) + \Delta_+(a_{21} - a_{22}) \theta(y_1^0 - y_2^0)) \right] \\ & \times \left[\frac{1}{i} (\Delta_+(a_{32} - a_{31}) \theta(y_2^0 - y_1^0) + \Delta_+(a_{31} - a_{32}) \theta(y_1^0 - y_2^0)) \right] \\ & \times \left[\frac{1}{i} (\Delta_+(a_{42} - a_{41}) \theta(y_2^0 - y_1^0) + \Delta_+(a_{41} - a_{42}) \theta(y_1^0 - y_2^0)) \right] \end{aligned}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus, so bleiben acht Terme übrig. Da die Summanden, bei denen Produkte von Stufenfunktionen mit entgegengesetztem Argument auftreten, eine Lebesgue-Nullmenge bilden, ergeben diese bei der Integration den Wert Null (so lange die Singularitäten der Distributionen an dieser Stelle nicht angenommen werden, was in unserem Fall aber gewährleistet ist). Der erste Summand, nennen wir ihn γ_1 , ergibt folgendes Integral:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = c \int_{\mathbb{R}^{40}} d\underline{a}_1 d\underline{a}_2 dy_1 dy_2 \delta^{(4)}(y_1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 a_{i1}) \delta^{(4)}(y_2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 a_{i2}) e^{-\frac{1}{2}|y_1 - \underline{a}_1|^2 - \frac{1}{2}|y_2 - \underline{a}_2|^2} \\ \times \theta(x_2^0 - y_2^0) \theta(y_2^0 - y_1^0) \theta(y_1^0 - x_1^0) \Delta_+(x_2 - a_{12}) \Delta_+(a_{11} - x_1) \\ \times \Delta_+(a_{22} - a_{21}) \Delta_+(a_{32} - a_{31}) \Delta_+(a_{42} - a_{41}) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

wobei $c := c_{41} c_{42} / (4! 4! 4^4 i^5)$. Die Auswertung dieses Integrals ist etwas technisch und benutzt die Techniken aus Abschnitt 2.4, die zur Berechnung des Integralkerns $K_{t_m, \lambda}^{J_\bullet}$ der S -Matrix notwendig sind. Die ausführliche Rechnung befindet sich im Anhang A. Betrachten wir

$$\gamma_1 = \tilde{c} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3}} \tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3)$$

mit $\tilde{c} = c i^5 / (32(2\pi)^{15})$ so erhalten wir Formel (A.1.4):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) &:= (2\pi)^{15} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2}} e^{iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2} \times \left\{ \right. \\
&\times \left\{ e^{-\frac{1}{32}|3q_1 - k_1 - k_2 - k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + q_1 - k_2 - k_3|^2} \dots \right\} \\
&\times \left\{ e^{-\frac{1}{32}|3q_2 + k_1 + k_2 + k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + q_2 - k_2 - k_3|^2} \dots \right\} \\
&\times \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) \\
&\times \frac{1}{2\pi} \left[- \frac{e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} e^{i(q_2^0 - q_1^0)(t_2 - t_1)}}{(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(q_2^0 - q_1^0)} \right. \\
&\quad + \frac{e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} e^{i(-q_1^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)t_1} e^{(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)t_2}}{(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(-q_1^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)} \\
&\quad \left. - \frac{e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} e^{i(q_2^0 - q_1^0)(t_2 - t_1)}}{(q_1^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(q_2^0 - q_1^0)} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

und stellen fest, dass dieser Ausdruck nicht wohldefiniert ist. Denn führt man die räumlichen Deltafunktionen aus, so ergibt der Nenner in der letzten (und drittletzten Zeile) identisch Null. Dies kann natürlich umgangen werden, indem man die Kopplungskonstante als Schwartzfunktion in der Zeit mit einbezieht und die Rechnungen wiederholt. Im Anhang wird dieses gezeigt und man erhält, wenn gilt $\lambda \rightarrow \lambda(t) = \exp\{-\frac{t^2}{2\rho}\}$, Formel (A.1.7):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) &= -(2\pi)^{14} \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi i)} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
&\times \left[e^{-\frac{1}{32}|3k - k_1 - k_2 - k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + k - k_2 - k_3|^2} \dots e^{-\frac{1}{32}|3k + k_1 + k_2 + k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + k - k_2 - k_3|^2} \dots \right] \\
&\times \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left[\frac{e^{i(-k^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)t_1} e^{-\frac{\rho}{2}(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)^2}}{(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)} - \frac{e^{i2(-k^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)t_1}}{(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Der zweite Term in diesem Ausdruck divergiert offensichtlich mit $\sqrt{\rho}$ und der erste geht mit der Gaußfunktion gegen Null. Hierbei gilt die Abschätzung $0 < k_1^0 + k_2^0 + k_3^0 - k^0$ für $m > 0$, wobei $k^0 = \sqrt{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2 + m^2}$ ist (vergl. Diskussion von oben).

Die verbleibenden Terme berechnen sich analog. Diese können aber nicht zusammengefasst werden, da sich die Argumente in den Gaußkernen unterscheiden. Es können sich somit keine Divergenzen wegheben.

Die Divergenzen, die in (3.1.5) Probleme bereiten, tauchen auch in der herkömmlichen Quantenfeldtheorie auf. Dort umgeht man dies allerdings von Anfang an. So berechnet man

direkt das Integral über den Viererimpuls indem man das Integral euklidisiert, sphärische Koordinaten wählt und eine Cut-Off- Regularisierung einführt [19]:

$$\int d^4p = i \int (d^4p)_E \rightarrow i \int_{\Omega(4)} \int_0^\Lambda p^3 dp \equiv \text{reg}_\Lambda \int dp$$

Dieses Verfahren kann in unserem Fall nicht durchgeführt werden, da es nicht möglich ist den Propagator

$$\left[\frac{1}{i} (\Delta_+ (a_{ij} - a_{i'j'}) \theta(y_j^0 - y_{j'}^0) + \Delta_+ (a_{i'j'} - a_{ij}) \theta(y_{j'}^0 - y_j^0)) \right]$$

in ein Integral über den Viererimpuls umzuschreiben. Das Problem hierbei ist, dass die Zeitordnung bezüglich der mittleren Koordinaten durchgeführt wird.

Offensichtlich bereitet die Zeitordnung an dieser Stelle die größten Probleme, deshalb wollen wir zunächst das zeitunabhängige Verhalten der Theorie studieren.

3.1.1 Zeitunabhängige Störungstheorie

Motiviert durch die Diskussion im letzten Abschnitt, wollen wir nun die Selbstenergiebeiträge quantenmechanisch berechnen und das Spektrum des Hamiltonoperators zur Zeit $t = 0$ betrachten. Als Ansatz wählen wir die zeitunabhängige Störungstheorie in der Formulierung von Rayleigh-Schrödinger und berechnen die Energiekorrektur im Vakuum und im uneigentlichen Einteilchenzustand in zweiter Ordnung. Es zeigt sich hierbei, dass sich die divergenten Terme im Einteilchenzustand exakt mit der Vakuumkorrektur wegheben. Mit dieser Vorgehensweise umgehen wir somit die Komplikationen, die durch die Zeitordnung entstehen und erhalten eine endliche Energiekorrektur.

Die Rayleigh-Schrödinger Reihe ist definiert durch ([15, XII]): $E(\lambda) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$. Um eventuelle Probleme mit divergenten Termen vorzubeugen, definieren wir zunächst die formale zeitunabhängige Störungsreihe

$$E(\lambda) := E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \quad ,$$

indem wir die Kopplungskonstante λ als Schwarzfunktion $\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ wählen. Am Ende führen wir dann den adiabatischen Limes $\lambda(\mathbf{x}) \rightarrow \text{konstant}$ durch. Die ersten beiden Koeffizienten sind im Vakuum Erwartungswert gegeben durch:

$$\begin{aligned} \alpha_1^\lambda &= \langle 0 | H_I^\lambda | 0 \rangle \\ \alpha_2^\lambda &= - \langle 0 | H_I^\lambda H_0^{-1} H_I^\lambda | 0 \rangle \end{aligned}$$

Hierbei ist H_0 mit

$$H_0 |p\rangle = \omega_{\mathbf{p}} |p\rangle \quad \text{und} \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

der freie, ungestörte Hamilton-Operator und

$$H_I^\lambda = \frac{1}{n!} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) : \phi_R^{(n)}(0, \mathbf{x}) : \quad (3.1.7)$$

der Störterm mit den regularisierten Wickmonomen zur Zeit $t = 0$, welche mit der Schwartzfunktion $\lambda(\mathbf{x})$ verschmiert sind. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass der Wechselwirkungs-Hamilton-Operator der gewöhnlichen ϕ^n -Theorie im Gegensatz zu (3.1.7) mit Hilfe der freien Felder zur Zeit $t = 0$ definiert wird. Der Unterschied zu unserer Theorie liegt hierbei in der Tatsache, dass die Zeitentwicklung von $H_I^\lambda(t)$ nicht wie in der herkömmlichen Theorie über die Zeit-Null-Felder definiert wird, sondern gegeben ist durch

$$\begin{aligned} H_I^\lambda(t) &= e^{iH_0 t} \int [\delta(x^0 - \tau) \lambda(x) \mathcal{L}_{\text{eff}}(x)]_{\tau=0} dx e^{-iH_0 t} \\ &= \frac{c_n}{n!} \int d\mathbf{x} \int da_1 \dots da_n \lambda(0, \mathbf{x}) \tilde{r}_n((0, \mathbf{x}) - a_1, \dots, (0, \mathbf{x}) - a_n) \\ &\quad \times e^{iH_0 t} : \phi(a_1) \dots \phi(a_n) : e^{-iH_0 t} \quad , \end{aligned}$$

wobei H_0 der freie Hamiltonoperator aus Kapitel 2 ist [11]. Wir benutzen folgende Konvention für die Felder:

$$\phi(a) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [e^{ika} a_{\mathbf{k}}^+ + e^{-ika} a_{\mathbf{k}}]$$

und die uneigentlichen Impulszustände sind gegeben durch

$$|k_1 \dots k_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\mathbf{k}_1}^+ \dots a_{\mathbf{k}_n}^+ |0\rangle \quad , \quad a_{\mathbf{k}_i} |0\rangle = 0 \quad \text{wobei gilt} \quad [a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}}^+] = \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad .$$

Damit ist der Einsoperator definiert durch

$$\mathbb{1} := \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n |k_1 \dots k_n\rangle \langle k_1 \dots k_n| \quad (3.1.8)$$

und die (uneigentlichen) n -Teilchenzustände normiert auf

$$\langle k_1 \dots k_n | p_1 \dots p_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i - \mathbf{p}_{\pi(i)}) \quad .$$

Zunächst berechnen wir die Vakuumenergiekorrektur in zweiter Ordnung und anschließend die Einteilchenenergiekorrektur ebenfalls in zweiter Ordnung. Aufgrund der Normalordnung ist $\alpha_1^\lambda = 0$. Im Folgenden beschränken wir uns wieder auf die $\phi_R^{(3)}$ -Theorie. Die Erweiterung auf eine $\phi_R^{(n)}$ -Theorie ist zwar auch hier möglich, fördert aber nicht das prinzipielle Verständnis der Theorie. Die ausführliche Rechnung befindet sich im Anhang B und benutzt auch wieder die Techniken aus Kapitel 2.

Für die Vakuumkorrektur berechnen wir den Erwartungswert, indem der Einsoperator (3.1.8) entsprechend eingefügt wird:

$$\begin{aligned} \langle 0 | H_I^\lambda H_0^{-1} H_I^\lambda | 0 \rangle &= \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \left[\right. \\ &\quad \left. \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \langle 0 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | 0 \rangle \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Das Ergebnis ist ein Term, der für $\lambda(\mathbf{x}) \rightarrow \text{konst.}$ divergiert: Gleichung (B.1.1):

$$\begin{aligned} \alpha_2^\lambda &= \frac{-1}{(2\pi)^9 3^4 16} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} |\lambda(\frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \check{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{p}_3))|^2 \\ &\times e^{-|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} \\ &\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_3} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$\check{\lambda}$ ist hierbei die Fouriertransformierte von $\lambda(\mathbf{x})$. Die Berechnung der Energiekorrektur im uneigentlichen Einteilchenzustand ist etwas aufwändiger. Hierbei sind die Koeffizienten $\alpha_{i_q}^\lambda$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle q' | q \rangle \alpha_{1_q}^\lambda &= \langle q' | H_I | q \rangle = 0 \\ \langle q' | q \rangle \alpha_{2_q}^\lambda &= -\langle q' | H_I^\lambda (H_0 - \omega_{\mathbf{q}})^{-1} H_I^\lambda | q \rangle \end{aligned}$$

Wir werten $\alpha_{2_q}^\lambda$ wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \langle q' | H_I^\lambda (H_0 - \omega_{\mathbf{q}})^{-1} H_I | q \rangle &= \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle q' | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 \rangle \langle p_1 p_2 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | q \rangle \\ &+ \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle q' | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 p_4 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | q \rangle \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Im Gegensatz zur Energiekorrektur im Vakuum sind hier zwei³ Terme von Null verschieden. Für den ersten Summanden in diesem Ausdruck erhält man Gleichung (B.2.1). Hierbei haben wir den Einteilchenzustand abgespalten⁴ und $\lambda(\mathbf{x}) \rightarrow 1$ gehen lassen:

$$\begin{aligned} \langle q' | q \rangle &\times \frac{1}{(2\pi)^6 16} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \left\{ \right. \\ &\times e^{-|\mathbf{p}_1|^2} e^{-|\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}|^2} e^{-|\mathbf{q}|^2} \\ &\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

³Dieser Umstand ändert sich offensichtlich nicht für eine ϕ^n -Theorie.

⁴Später normieren wir die abgespaltene Deltafunktion weg. Diese Prozedur kann in den präzisen mathematischen Rahmen der direkten Integralzerlegung eingebettet werden. Das würde aber den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Deshalb sei der Interessierte auf [26] verwiesen. Von einem etwas pragmatischeren Standpunkt aus, kann man das System auch in einem endlichen Würfel mit Kantenlänge a betrachten und nach der Normierung den Limes $a \rightarrow \infty$ durchführen.

Der zweite Term ist gegeben durch die Summe von Gleichung (B.2.2) und Gleichung (B.2.3)

$$\begin{aligned}
\langle q'|q \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6 16} \int d\mathbf{p}_1 \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} e^{-|\mathbf{p}_1|^2} e^{-|\mathbf{p}_1+\mathbf{q}|^2} e^{-|\mathbf{q}|^2} \quad (3.1.13) \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} \\
+ \langle q'|q \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^9 3^4 16} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} |\lambda(\frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3))|^2 \\
&\times e^{-|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_3} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2}
\end{aligned}$$

Im ersten Summanden haben wir wieder $\lambda(\mathbf{x}) \equiv 1$ gesetzt und man erkennt sogleich, dass der zweite Term bis auf den Einteilchenzustand exakt mit der Vakuumkorrektur in zweiter Ordnung übereinstimmt. Wir definieren nun die renormierte Energiekorrektur für ein Teilchen, das durch den Raum propagiert:

Definition 3.1.1. In zweiter Ordnung ist die renormierte Energiekorrektur $\delta E(\mathbf{q})$ definiert durch

$$\langle q'|q \rangle \delta E(\mathbf{q}) := \lim_{\lambda(\cdot) \rightarrow 1} \langle q'| H_I^\lambda (H_0 - \omega_q)^{-1} H_I^\lambda |q \rangle - \langle q'|q \rangle \langle 0| H_I^\lambda H_0^{-1} H_I^\lambda |0 \rangle,$$

sodass für die Energie eines Teilchens gilt $E(\mathbf{q}) = \omega_{\mathbf{q}} - \delta E(\mathbf{q})$.

Mit Gleichung (3.1.10), (3.1.12) und (3.1.13) können wir $\delta E(\mathbf{q})$ explizit angeben:

$$\begin{aligned}
\delta E(\mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \left[\int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} e^{-|\mathbf{p}_1|^2} e^{-|\mathbf{p}_1-\mathbf{q}|^2} e^{-|\mathbf{q}|^2} \quad (3.1.14) \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} \\
&+ \int d\mathbf{p}_1 \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} e^{-|\mathbf{p}_1|^2} e^{-|\mathbf{p}_1+\mathbf{q}|^2} e^{-|\mathbf{q}|^2} \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} \Big]
\end{aligned}$$

Wir wollen diese Korrektur nun etwas genauer betrachten und gehen zu Kugelkoordinaten über ($q := |\mathbf{q}|$, $p := |\mathbf{p}|$, θ, φ). Im ersten Term ersetzen wir noch $\mathbf{p}_1 \rightarrow -\mathbf{p}_1$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\delta E(q) &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{16} \frac{e^{-q^2}}{\sqrt{q^2 + m^2}} \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 d \cos \theta \, p^2 \frac{e^{-2p^2} e^{-2qp \cos \theta} e^{-q^2}}{\omega_p \omega_{p,q,\theta}} \quad (3.1.15) \\
&\times \left[\frac{1}{\omega_p + \omega_{p,q,\theta} - \omega_q} \right. \\
&\times e^{-|\omega_p - \frac{1}{3}(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} - \omega_q)|^2} e^{-|\omega_{p,q,\theta} - \frac{1}{3}(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} - \omega_q)|^2} e^{-|\omega_q - \frac{1}{3}(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} - \omega_q)|^2} \\
&+ \frac{1}{\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q} \\
&\times e^{-|\omega_p - \frac{1}{3}(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q)|^2} e^{-|\omega_{p,q,\theta} - \frac{1}{3}(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q)|^2} e^{-|\omega_q - \frac{1}{3}(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q)|^2} \Big]
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\omega_{q,p,\theta} := \sqrt{q^2 + p^2 + 2qp \cos \theta + m^2}$. Den Exponenten kann man noch umformen und einen nur von q und m abhängigen Faktor abspalten:

$$\begin{aligned} \delta E(q) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \frac{e^{-\frac{10}{3}q^2} e^{-2m}}{\sqrt{q^2 + m^2}} \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 d\cos \theta \, p^2 \frac{e^{-\frac{10}{3}p^2} e^{-\frac{8}{3}qp \cos \theta} e^{-\omega_p \omega_{p,q,\theta} + \omega_p \omega_q}}{\omega_p \omega_{p,q,\theta}} \\ &\quad \times \left[\frac{e^{\omega_{p,q,\theta} \omega_q}}{\omega_p + \omega_{p,q,\theta} - \omega_q} + \frac{e^{-\omega_{p,q,\theta} \omega_q}}{\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q} \right] \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Das Integral in (3.1.16) kann man nun mit numerischen Rechnungen auswerten, um die Energiekorrektur graphisch zu diskutieren. Hier soll aber erst eine qualitative Betrachtung von $\delta E(\mathbf{q})$ vorgenommen werden.

Proposition 3.1.2. *Eigenschaften von $\delta E(\mathbf{q})$:*

- (i) *Im Gegensatz zur massiven Quantenfeldtheorie auf dem kommutativen Minkowskiraum ist die Energiekorrektur $\delta E(\mathbf{q})$ endlich. Genauer: $|\delta E(\mathbf{q})| < \infty$ für alle $|\mathbf{q}| \geq 0$ und ein beliebiges $m > 0$. Insbesondere ist $\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow \infty} \delta E(\mathbf{q}) = 0$*
- (ii) *$\delta E(\mathbf{q})$ ist rotationsinvariant nicht aber lorentzinvariant.*
- (iii) *Im Limes $\lambda_{\mathbf{p}} \rightarrow 0$ erhält man die Energiekorrektur der gewöhnlichen kommutativen Theorie zurück. (Nach Einführung eines geeigneten Cut-Offs Λ .)*

Beweis. (i): Im Anhang C wird die Energiekorrektur $\delta E_l(\mathbf{q})$ für die gewöhnliche lorentzinvariante ϕ^3 -Theorie berechnet, wobei das l zur Unterscheidung für lorentzinvariant steht. Man bekommt als Ergebnis Gleichung (C.0.2):

$$\delta E_l(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{8} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \frac{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}}}{(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \quad (3.1.17)$$

Dieses Integral divergiert offensichtlich für $\Lambda \rightarrow \infty$. Im Gegensatz dazu zeigen wir, dass das Integral in Formel (3.1.14) bzw. (3.1.16) wohldefiniert ist und eine in $\mathbf{q}$ stetige Funktion liefert. Diese muss im Limes für $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ verschwinden und auf ganz $\mathbb{R}^3$ beschränkt sein.

Wir stellen zunächst fest, dass das Integral wohldefiniert ist. Dazu betrachten wir zunächst die Abschätzung für den Nenner im ersten Term in (3.1.14). Es gilt $\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}} > 0$ für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ und festes $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ und ein $m > 0$. Hierbei haben wir die Transformation $\mathbf{p}_1 \rightarrow -\mathbf{p}$ gemacht. Diese Abschätzung wird mit folgender Betrachtung deutlich:

$$\sqrt{q^2 + m^2} < \sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{(\mathbf{q} + \mathbf{p})^2 + m^2}$$

quadrieren und Umformen führt zu

$$0 < 2\mathbf{p}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + m^2 + 2\sqrt{p^2 + m^2}\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 + m^2} \quad .$$

Nun ist $|\mathbf{p}| \leq \sqrt{p^2 + m^2}$ und $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| < \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 + m^2}$ und für ein $m > 0$ gilt dann die Ungleichung:

$$m^2 \leq 2\mathbf{p}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + m^2 + 2\sqrt{p^2 + m^2}\sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 + m^2} = (\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2 \quad .$$

Damit können wir den Nenner abschätzen durch:

$$\frac{1}{\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} = \frac{\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}}{(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \geq \frac{\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}}{m^2}$$

Nun wird $(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})m^{-2}$ beliebig groß für $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$. Wir zeigen aber, dass die übrigen Faktoren eine Schwartzfunktion bilden und damit das Integral für große $\mathbf{p}$ regularisieren: der Faktor $(\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\omega_{\mathbf{q}})^{-1}$ ist eine durch m^{-3} beschränkte Funktion und die Exponentialfunktionen lassen sich durch eine Majorante abschätzen. Das fällt uns in Kugelkoordinaten leichter und wir benutzen Gleichung 3.1.16. Der Faktor

$$p^2 e^{-\frac{10}{3}p^2} e^{-\frac{8}{3}qp \cos \theta} e^{-\omega_p \omega_{p,q,\theta} + \omega_p \omega_q} e^{\omega_{p,q,\theta} \omega_q} \quad (3.1.18)$$

ist eine Schwartzfunktion in p und stetig in $q, \cos \theta$. Es gilt hierbei die Abschätzung für große $q, p \gg 0$ durch eine Majorante:

$$e^{-\frac{8}{3}qp \cos \theta} e^{-\omega_p \omega_{p,q,\theta} + \omega_p \omega_q} e^{\omega_{p,q,\theta} \omega_q} < e^{+\frac{4}{3}(p^2+q^2)}$$

Wir ersetzen nun den majorisierten Ausdruck und bekommen anstatt (3.1.18):

$$p^2 e^{-2p^2} e^{+\frac{4}{3}q^2}$$

Multipliziert man diesen Faktor mit der stetigen, durch m^{-3} beschränkten Funktion und der unbeschränkten Funktion $(\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q)m^{-2}$ (aus der Abschätzung von oben) ergibt das eine Schwartzfunktion. Das Integral über den ersten Term ist somit wohldefiniert.

Der zweite Term in (3.1.14) bzw. (3.1.16) ist etwas einfacher zu behandeln. Der Nenner ergibt hier eine durch m^{-4} beschränkte Funktion und für die Exponentialfunktionen gilt die gleiche Abschätzung. Das Integral ist somit auch endlich.

Durch die Integration über $\cos \theta$ und p , erhält man nun eine stetige Funktion in q , die für große q nicht schneller wächst als $\exp\{\frac{4}{3}q^2\}$. Der Faktor vor dem Integral in (3.1.16) setzt sich zusammen aus dem Gaußfaktor $\exp\{-\frac{10}{3}q^2\}$ multipliziert mit einer beschränkten Funktion. Durch die Abschätzungen folgt, dass das Produkt des Vorfaktors mit dem Integral eine auf $q \in [0, \infty]$ beschränkte Funktion ergibt, die im Unendlichen verschwindet. Damit ist $\delta E(q)$ (bzw. $\delta E(\mathbf{q})$) eine stetige, beschränkte Funktion, die im Unendlichen verschwindet für alle $m > 0$ (dies gilt nicht für $m = 0$).

(ii): In Kugelkoordinaten zeigt sich, dass $\delta E(\mathbf{q})$ nur vom Radius q abhängt. Der gesamte Ausdruck ist somit rotationsinvariant. Desweiteren sind die Gaußfaktoren in 3.1.14 nicht lorentzinvariant und somit auch nicht $\delta E(\mathbf{q})$.

(iii): Die Plancklänge steht nur in den Exponenten in (3.1.14). Für $\lambda_{\mathbf{P}} \rightarrow 0$ werden diese Eins und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{\mathbf{P}} \rightarrow 0} \delta E(\mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \\ &+ \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

Mit der Transformation $\mathbf{p}_1 \rightarrow -\mathbf{p}_1$ im ersten Term erhält man:

$$\lim_{\lambda_{\mathbf{P}} \rightarrow 0} \delta E(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{8} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \frac{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}}}{(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1+\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}$$

dieser Ausdruck entspricht exakt (3.1.17). $\square$

Eine Massenkorrektur kann man nun mit Hilfe der Energiekorrektur beim Impuls Null einführen:

Definition 3.1.3. Die Massenkorrektur in zweiter Ordnung Störungsrechnung δm ist definiert durch den Grenzwert

$$\delta m := \lim_{q \rightarrow 0} (-\delta E(q)) \quad ,$$

sodass die physikalische Masse $\tilde{m}$ gegeben ist durch $\tilde{m} = m + \delta m$.

Explizit bestimmt sich die Massenkorrektur aus Formel (3.1.14):

$$\begin{aligned} \delta m = & -\frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \left[\int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1} - m} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1}^2 m} e^{-2|\mathbf{p}_1|^2} e^{-2|\frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}+m)|^2} e^{-|\frac{2}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}+m)|^2} \right. \\ & \left. + \int d\mathbf{p}_1 \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}_1} + m} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1}^2 m} e^{-2|\mathbf{p}_1|^2} e^{-2|\frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}-m)|^2} e^{-|\frac{2}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}-m)|^2} \right] \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

etwas zusammengefasst ist das gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned} \delta m = & -\frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int d\mathbf{p}_1 \frac{e^{-2|\mathbf{p}_1|^2}}{\omega_{\mathbf{p}_1}^2 m} \\ & \times \left[\frac{e^{-2|\frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}+m)|^2} e^{-|\frac{2}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}+m)|^2}}{2\omega_{\mathbf{p}_1} - m} + \frac{e^{-2|\frac{1}{3}(2\omega_{\mathbf{p}_1}-m)|^2} e^{-|\frac{2}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1}-2m)|^2}}{\omega_{\mathbf{p}_1} + m} \right] \end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten bekommt man ein Integral, das nur noch vom Radius $p \in [0, \infty)$ abhängig ist:

$$\delta m = -\frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{8} \frac{e^{-2m}}{m} \int_0^\infty dp \frac{p^2 e^{-\frac{13}{3}p^2}}{p^2 + m^2} \left[\frac{e^{2\sqrt{p^2+m^2}m}}{2\sqrt{p^2+m^2} - m} + \frac{1}{2\sqrt{p^2+m^2} + m} \right] \quad (3.1.20)$$

Wir wollen auch die Massenkorrektur zunächst qualitativ betrachten.

Bemerkung 3.1.4. Für die Massenkorrektur δm gilt:

- (i) Im Gegensatz zur kommutativen Quantenfeldtheorie ist die Massenkorrektur (3.1.19) endlich, genauer $|\delta m| < \infty$ für ein $m > 0$.
- (ii) Im Limes $\lambda_{\mathbf{P}} \rightarrow 0$, in welchem die Nichtkommutativität verschwindet, erhält man die quantenmechanische Massenkorrektur der Quantenfeldtheorie auf dem kommutativen Minkowskiraum zurück.

Beweis. (i): Im Anhang C wird die Massenkorrektur δm_l für eine herkömmliche lorentz-invariante ϕ^3 -Theorie quantenmechanisch berechnet und man erhält Formel (C.0.3):

$$\delta m_l = -\frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{4m} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}(4p^2 + 3m^2)}$$

Dieses Integral divergiert offensichtlich. Vergleicht man diesen Ausdruck mit (3.1.20), so erkennt man deutlich den regulierenden Einfluss des Gaußkerns in der effektiven Theorie. Aus Proposition 3.1.2 (i) folgt für $q \rightarrow 0$, dass $-\delta m < \infty$ für ein festes $m > 0$.

(ii): Die Plancklänge tritt nur in den Exponenten in (3.1.20) auf. Für $\lambda_P \rightarrow 0$ werden diese Eins und es gilt $\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \delta m = \delta m_l$ (vergleiche Proposition 3.1.2 (iii)):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \delta m &= -\frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{8} \frac{1}{m} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{p^2 + m^2} \left[\frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2} - m} + \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2} + m} \right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{4m} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}(4p^2 + 3m^2)} \end{aligned}$$

□

Interessant ist nun das Verhalten der Energiekorrektur im Bereich der Plancklänge, für $q \approx 1$, da wir $\lambda_P \equiv 1$ gesetzt haben. In Abbildung 3.2 ist die radiale Abweichung

$$D(q) := \sqrt{q^2 + (m + \delta m)^2} - \sqrt{q^2 + m^2} + \delta E(q)$$

der korrigierten Energie zur Lorentzinvarianten in Einheiten der (reziproken) Plancklänge für verschiedene Werte von m aufgezeigt. Für kleine Massen (durchgezogene Linie $m = 0.3$) ist die Abweichung stärker als für große Massen. Die maximale Abweichung befindet sich bei ca. $2/3$ der Plancklänge und verschiebt sich zu höheren Impulsen bei abnehmender Masse. Setzt man anstatt der Plancklänge einen beliebigen Parameter $a > 0$ ein, so könnte man nun durch Experimente untere Schranken für (den Parameter a) nichtkommutative Effekte festlegen.

In Abbildung 3.2 sind die Massenschalen mit impulsabhängiger Energiekorrektur $E(q) = \omega_q - \delta E(q)$ (schmale, durchgezogene Linie), ohne Korrektur (gestrichelte Linie) und mit der lorentzinvarianten Massenkorrektur $\tilde{m} = m + \delta m$ (Strich-Punkt-Linie) gegen den Impuls aufgetragen. Man kann deutlich erkennen, dass sich die Abweichung der korrigierten Energie für große Impulse auswirkt.

Die Gruppengeschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ kann nun ebenfalls studiert werden. Diese ist gegeben durch:

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} E(\mathbf{q})$$

Hierbei ist $E(\mathbf{q}) := \omega_{\mathbf{q}} - \delta E(\mathbf{q})$ die korrigierte Energie in zweiter Ordnung. $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ ist offensichtlich ebenfalls rotations- und translationskovariant aber nicht lorentzkovariant. Wir können Kugelkoordinaten $q := |\mathbf{q}|, \theta, \varphi$ wählen und die radiale Gruppengeschwindigkeit $v(q) = |\mathbf{v}(q)|$ berechnen:

$$v(q) = \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} - \frac{\partial}{\partial q} \delta E(q) \quad (3.1.21)$$

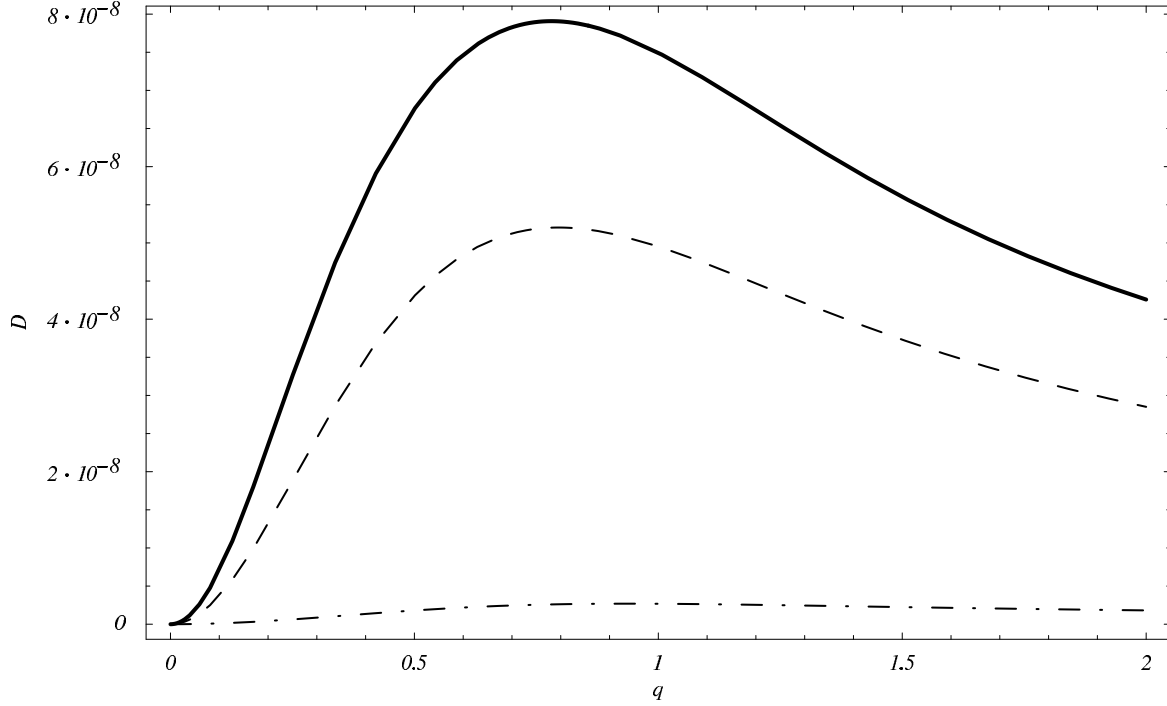


Abbildung 3.1: Die Differenz $D(q) := \sqrt{q^2 + (m + \delta m)^2} - \sqrt{q^2 + m^2} + \delta E(q)$ in Einheiten $(2\pi)\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}$. Die Abweichung verschwindet für kleine Energien und hat ihr Maximum bei ca. $2/3$ der Plancklänge. Die Graphen sind numerisch mit **Mathematica 4.2** erstellt: $q \in [0, 2]$, durchgezogene Linie: $m = 0.3$, gestrichelte Linie: $m = 0.4$, Strich-Punkt-Linie: $m = 1$.

Die Ableitung $\partial \delta E(q) / \partial q$ ist gegeben durch:

$$\frac{\partial}{\partial q} \delta E(q) = C(q) \cdot I(q)' + C'(q) \cdot I(q)$$

mit den Vorfaktoren $C(q)$ und $C'(q)$:

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \frac{e^{-\frac{10}{3}q^2} e^{-2m}}{\omega_q}$$

$$C'(q) = -\frac{e^{-2m - \frac{10}{3}q^2} q}{16(2\pi)^6 (m^2 + q^2)^{3/2}} - \frac{5 e^{-2m - \frac{10}{3}q^2} q}{12 (2\pi)^6 \sqrt{m^2 + q^2}}$$

und den Integralen $I(q)$, $I'(q)$:

$$I(q) = \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 d \cos \theta p^2 \frac{e^{-\frac{10}{3}p^2} e^{-\frac{8}{3}qp \cos \theta} e^{-\omega_p \omega_{p,q,\theta} + \omega_p \omega_q}}{\omega_p \omega_{p,q,\theta}}$$

$$\times \left[\frac{e^{\omega_{p,q,\theta} \omega_q}}{\omega_p + \omega_{p,q,\theta} - \omega_q} + \frac{e^{-\omega_{p,q,\theta} \omega_q}}{\omega_p + \omega_{p,q,\theta} + \omega_q} \right]$$

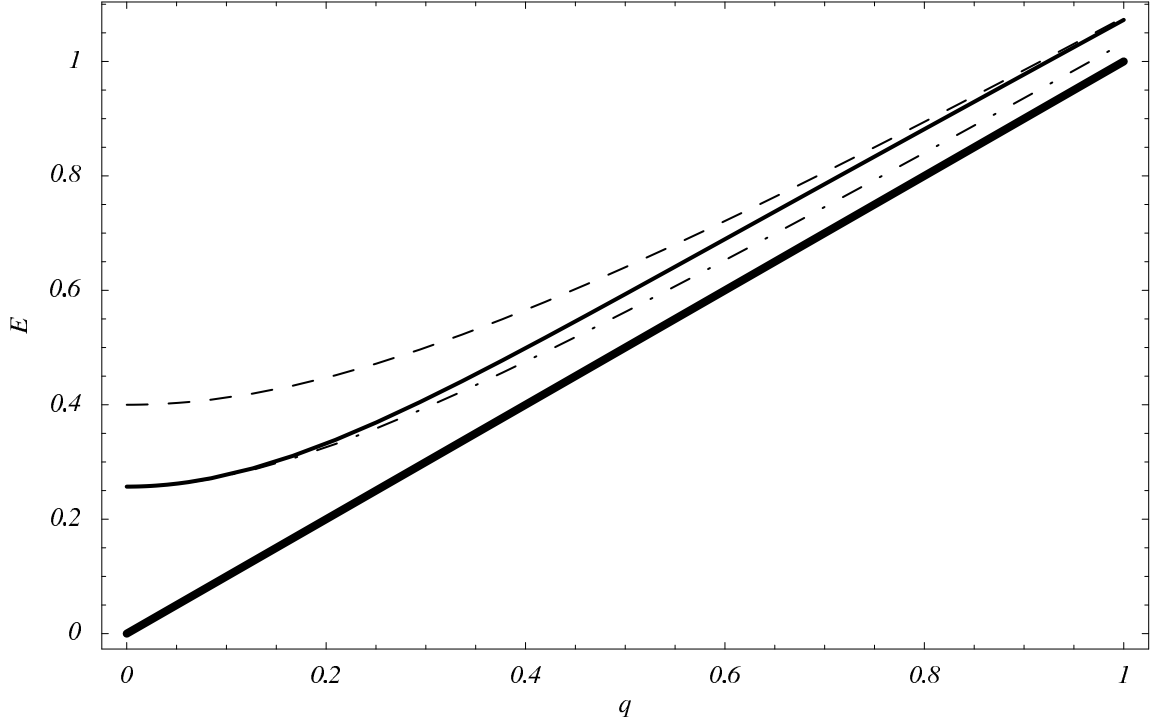


Abbildung 3.2: Abhängigkeit der Energie eines Teilchens vom radialen Impuls in Einheiten der Plancklänge. Die dicke Linie zeigt den Rand des Lichtkegels, die gestrichelte Linie ist die Massenschale für ein freies Teilchen ohne Korrektur, die schmale durchgezogene Linie zeigt die Massenschale mit der impulsabhängigen Energiekorrektur $\omega_q - \delta E(q)$ für die effektive Theorie und die Strich-Punkt-Linie zeigt die Massenschale mit der Massenverschiebung $\tilde{m} = m + \delta m$. Man erkennt deutlich die Abweichung der effektiven Theorie für große q . Der Graph ist mit **Mathematica 4.2** numerisch erstellt: $q \in [0, 2]$, $m = 0.4$, wobei die Korrekturen mit einem Faktor $16(2\pi)^6$ skaliert sind, um die Abweichung sichtbar zu machen.

und

$$\begin{aligned}
 I(q)' = & \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 d\cos\theta \, p^2 \, e^{-\frac{10p^2}{3} - \frac{8\cos\theta pq}{3} + \omega_q \omega_{pq\theta} - \omega_p(\omega_q + \omega_{pq\theta})} \left\{ \right. \\
 & - \frac{-\frac{q}{\omega_q} + \frac{2\cos\theta p + 2q}{2\omega_{pq\theta}}}{(\omega_p - \omega_q + \omega_{pq\theta})^2} - \frac{\frac{q}{\omega_q} + \frac{2\cos\theta p + 2q}{2\omega_{pq\theta}}}{(\omega_p + \omega_q + \omega_{pq\theta})^2} \\
 & + \frac{-\frac{8\cos\theta p}{3} - \frac{(2\cos\theta p + 2q)\omega_q}{2\omega_{pq\theta}} - \frac{q\omega_{pq\theta}}{\omega_q} - \omega_p \left(\frac{q}{\omega_q} + \frac{2\cos\theta p + 2q}{2\omega_{pq\theta}} \right)}{\omega_p + \omega_q + \omega_{pq\theta}} \\
 & \left. + \frac{-\frac{8\cos\theta p}{3} + \frac{(2\cos\theta p + 2q)\omega_q}{2\omega_{pq\theta}} + \frac{q\omega_{pq\theta}}{\omega_q} - \omega_p \left(\frac{q}{\omega_q} + \frac{2\cos\theta p + 2q}{2\omega_{pq\theta}} \right)}{\omega_p - \omega_q + \omega_{pq\theta}} \right\}
 \end{aligned}$$

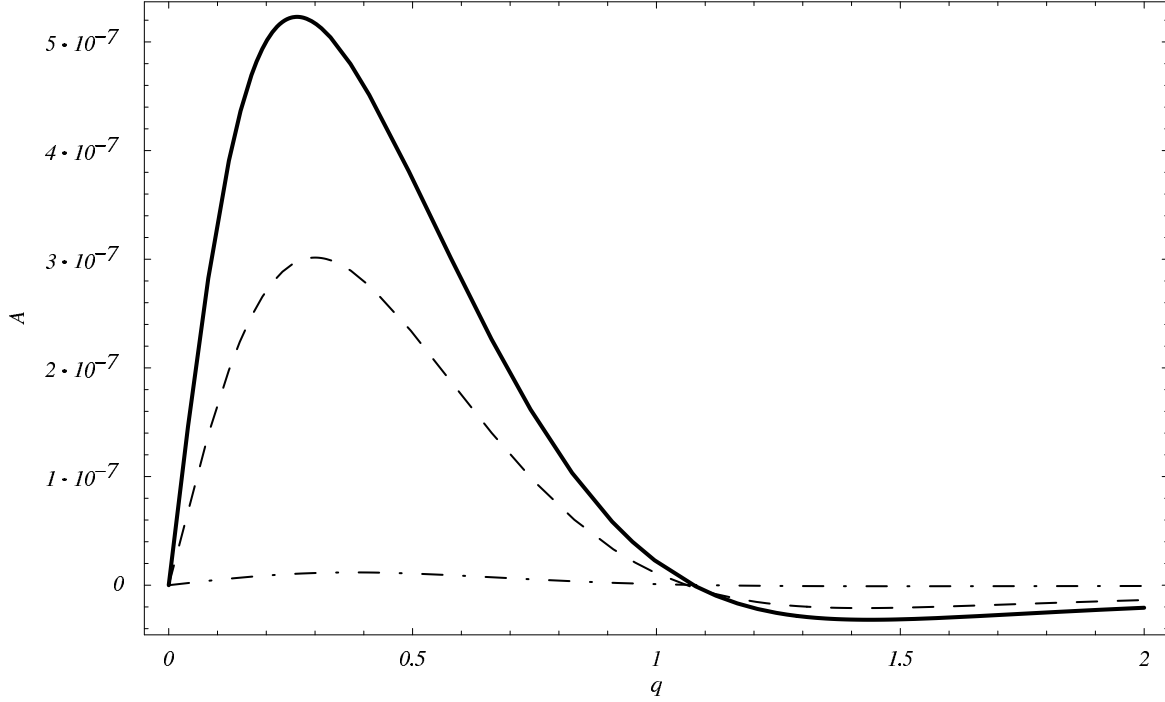


Abbildung 3.3: Radiale Abhängigkeit der Abweichung $A(q) = v(q) - v_l(q)$ der Gruppengeschwindigkeiten eines Teilchens in Einheiten der reziproken Plancklängen. Der Graph ist mit **Mathematica 4.2** numerisch erstellt: $q \in [0, 2]$, durchgezogene Linie: $m = 0.3$, gestrichelte Linie: $m = 0.4$, Strich-Punkt-Linie: $m = 1$.

Wir wollen nun das Verhalten von $v(q)$ mit der lorentzinvarianten Gruppengeschwindigkeit

$$v_l(q) := \frac{q}{\sqrt{q^2 + (m + \delta m)^2}}$$

vergleichen. Dazu definieren wir die radiale Abweichung $A(q)$:

$$A(q) := v(q) - v_l(q) = \frac{q}{\sqrt{q^2 + m^2}} - \frac{\partial}{\partial q} \delta E(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2 + (m + \delta m)^2}} \quad .$$

In Abbildung 3.3 ist die Abweichung $A(q)$ für verschiedene Massen in Abhängigkeit vom radialen Impuls q in Einheiten der Plancklängen gezeichnet. Betrachtet man die Graphen qualitativ, so ist zu erkennen, dass für kleine Massen (durchgezogene Linie $m = 0.3$) die Abweichung deutlich stärker ist als für großen Massen (Strich-Punkt-Linie $m = 1$). In [8] wurde in einem anderen Ansatz⁵ eine zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Gruppengeschwindigkeit (die in

⁵In [8] wird ein lorentzinvarianter Ansatz verfolgt, der auf dem Yang-Feldman Formalismus auf nichtkommutativer Raumzeit basiert (Siehe dazu auch [11, Chapter 4]). Berechnet wurde $v_\perp$ in einer nichtkommutativen ϕ^4 -Theorie.

unserem Ansatz natürlich Null ist) berechnet. Diese hat ebenfalls die Eigenschaft, dass die Abweichung von einer lorentzinvarianten Theorie für kleinere Massen stärker wird. Aber im Gegensatz dazu, dass dort die Abweichung bei verschwindendem Impuls maximal wird, liegt in unserer Theorie das Maximum bei ca. $1/3$ der Plancklänge und verschiebt sich zu höheren Impulsen bei größer werdender Masse. Für kleine Impulse (Energien) verschwindet die Abweichung. Damit steht unsere Theorie nicht im Widerspruch zu den heutigen Experimenten, die leider nur bei sehr kleinen Energien im Vergleich zur Planckenergie messen können.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit gesehen, dass es möglich ist, ein Modell auf dem nichtkommutativen Minkowskiraum zu konstruieren, dass die unerwünschten Ultraviolett-Divergenzen in der Quantenfeldtheorie auf natürliche Weise vermeidet. Mit Hilfe der Verallgemeinerung des Limes zusammenfallender Ereignisse konnte eine regularisierte Wechselwirkung definiert werden die zu einer S -Matrix führt, die in jedem Term endlich ist. Das Studium des Infrarotregimes zeigte jedoch, dass dort die Vakuum- und die Einteilchen-Irreduziblen-Graphen divergieren. Inspiriert durch die Renormierung in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie wurde dann versucht, eine Massenrenormierung durchzuführen. Dabei zeigte sich, dass aufgrund des nicht kausalen Verhaltens des verallgemeinerten Propagators die herkömmlichen Methoden zur Renormierung der Masse nicht greifen. Da die Zeitordnung diese Problematik verursacht, haben wir die zeitunabhängige Störungstheorie studiert und hierbei eine Energie- und eine Massenkorrektur in zweiter Ordnung berechnet. Es stellte sich heraus, dass diese für massive Felder endlich sind.

Der Umstand, dass wir noch keine nichtkommutativen Effekte in Experimenten gesehen haben, führt in unserer Theorie zu keinem Widerspruch. So tauchen erst bei sehr hohen Energien – ab ca. $1/3$ der Plancklänge – Abweichungen von der lorentzinvarianten Gruppengeschwindigkeit in der Größenordnung 10^{-7} auf.

Was in dieser Arbeit leider nicht vollständig geklärt werden konnte, ist die Renormierung in der zeitabhängigen Störungsrechnung. Es fehlt hierbei noch eine systematische Methode, die Divergenzen der 1PI-Graphen zu beseitigen. Eine weitere offene Frage in diesem Modell ist, wie man den Umstand zu verstehen hat, dass der freie Hamiltonoperator nicht mit der Quanten-Diagonal-Abbildung konstruiert werden kann.

Nun wären die nächsten Schritte, dass man die S -Matrix zu jeder Ordnung mit den renormierten Feldern neu formuliert und dann untersucht, ob der adiabatische Limes existiert. Interessant wäre dann ein realistisches Modell. Man kann dann die Plancklänge durch einen Parameter a ersetzen, um experimentell untere Schranken für die Nichtkommutativität festzulegen. Wenn es gelingt, die offenen Fragen befriedigend zu klären, ist es sicherlich sehr interessant, ob man dieses Modell im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie ebenfalls formulieren kann.

Anhang A

Einfache Graphen der effektiven Theorie

A.1 Der erste Selbstenergiebeitrag der $\phi_R^{(4)}$ -Theorie

In diesem Anhang berechnen wir explizit den ersten Beitrag zur Selbstenergie in der $\phi_R^{(4)}$ -Theorie auf quantisierter Raumzeit. Die Rechnungen können aber auf eine $\phi_R^{(n)}$ -Theorie erweitert werden, da dies aber nicht zum tieferen Verständnis der Theorie beiträgt, wird an dieser Stelle darauf verzichtet. Sei zunächst die Kopplung $\lambda(y_i) = \text{konstant}$. Aus Abschnitt 3.1 berechnen wir das Integral (3.1.4):

$$\begin{aligned} \gamma_1 = c \int_{\mathbb{R}^{40}} d\underline{a}_1 d\underline{a}_2 dy_1 dy_2 \delta^{(4)}\left(y_1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 a_{i1}\right) \delta^{(4)}\left(y_2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 a_{i2}\right) e^{-\frac{1}{2}|y_1 - \underline{a}_1|^2 - \frac{1}{2}|y_2 - \underline{a}_2|^2} \\ \times \theta(x_2^0 - y_2^0) \theta(y_2^0 - y_1^0) \theta(y_1^0 - x_1^0) \Delta_+(x_2 - a_{12}) \Delta_+(a_{11} - x_1) \\ \times \Delta_+(a_{22} - a_{21}) \Delta_+(a_{32} - a_{31}) \Delta_+(a_{42} - a_{41}) \end{aligned}$$

wobei $c := c_{41} c_{42} / (4! 4! 4^4 4^4 i^5)$ ist. Nach dem Ausführen der Deltafunktion erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_1 = c \int_{\mathbb{R}^{32}} d\underline{a}_1 d\underline{a}_2 e^{-\frac{1}{2}|\underline{a}_1 - \kappa(\underline{a}_1)|^2 - \frac{1}{2}|\underline{a}_2 - \kappa(\underline{a}_2)|^2} \theta(t_2 - \kappa^0(\underline{a}_2^0)) \theta(\kappa^0(\underline{a}_2^0) - \underline{a}_1^0) \theta(\kappa^0(\underline{a}_1^0) - t_1) \\ \times \Delta_+(x_2 - a_{12}) \Delta_+(a_{11} - x_1) \Delta_+(a_{22} - a_{21}) \Delta_+(a_{32} - a_{31}) \Delta_+(a_{42} - a_{41}) \end{aligned}$$

und ausgeschrieben ergibt das

$$= \tilde{c} \int_{\mathbb{R}^{15}} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \frac{e^{+iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2}}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3}} \mathcal{I}(t_1, t_2, q_1, q_2, k_1, k_2, k_3) \quad (\text{A.1.1})$$

wobei $\tilde{c} = c i^5 / (32(2\pi)^{15})$ ist und

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t_1, t_2, q_1, q_2, k_1, k_2, k_3) := \int_{\mathbb{R}^{32}} d\underline{a}_1 d\underline{a}_2 e^{-\frac{1}{2}|\underline{a}_1 - \kappa(\underline{a}_1)|^2 - \frac{1}{2}|\underline{a}_2 - \kappa(\underline{a}_2)|^2} \\ \times \theta(t_2 - \kappa^0(\underline{a}_2^0)) \theta(\kappa^0(\underline{a}_2^0) - \underline{a}_1^0) \theta(\kappa^0(\underline{a}_1^0) - t_1) \\ \times e^{i(-q_1 a_{11} + k_1 a_{21} + k_2 a_{31} + k_3 a_{41})} e^{i(q_2 a_{12} - k_1 a_{22} - k_2 a_{32} - k_3 a_{42})} \end{aligned}$$

Betrachtet man zunächst nur die Intergrationen über die a_{ij} so kann man hier die Techniken aus Lemma 2.4.1 direkt anwenden. Wir adaptieren die Notation an Abschnitt 2.4 und setzen dazu

$$U'_1 l_1 := \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad U'_2 l_2 := \begin{pmatrix} +I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

für $\mathcal{I}(t_1, t_2, q_1, q_2, k_1, k_2, k_3) \rightarrow \mathcal{I}(t_1, t_2, \underline{l}_1, \underline{l}_2)$ und schreiben für $\mathcal{I}$ mit $I', P', \underline{\xi}$ wie in (2.4.10-2.4.11) definiert:

$$\mathcal{I}(t_1, t_2, \underline{l}_1, \underline{l}_2) = \int_{\mathbb{R}^{32}} d\underline{a}_1 d\underline{a}_2 \theta(t_2 - (1/\sqrt{4})\underline{\xi} \cdot \underline{a}_2^0) \theta(\underline{\xi} \cdot (\underline{a}_2^0 - \underline{a}_1^0)) \theta((1/\sqrt{4})\underline{\xi} \cdot \underline{a}_1^0 - t_1) \\ e^{-\frac{1}{2} |(I' - P') \underline{a}_1|^2} e^{-\frac{1}{2} |(I' - P') \underline{a}_2|^2} e^{i \underline{l}_{1\mu} (U'_1 \underline{a}_1)^\mu} e^{i \underline{l}_{2\mu} (U'_2 \underline{a}_2)^\mu}$$

Die folgende Transformation macht nun die Gaußfunktionen unabhängig von einer Integrationsvariable. Sei dazu $\underline{b} := R' \underline{a}$ und $\underline{e}' = R' \underline{\xi}'$ mit der orthogonalen 16×16 -Matrix R' und $E' := R'^t P R'$ wie in Abschnitt 2.4 definiert, dann bekommen wir:

$$\mathcal{I}(t_1, t_2, \underline{l}_1, \underline{l}_2) = \int_{\mathbb{R}^{32}} d\underline{b}_1 d\underline{b}_2 \theta(t_2 - \underline{e}_4 \cdot \underline{b}_2^0) \theta(\underline{e}_4 \cdot (\underline{b}_2^0 - \underline{b}_1^0)) \theta(\underline{e}_4 \cdot \underline{b}_1^0 - t_1) \quad (\text{A.1.2}) \\ e^{-\frac{1}{2} |(I' - E') \underline{b}_1|^2} e^{-\frac{1}{2} |(I' - E') \underline{b}_2|^2} e^{i(R' U'_1 \underline{l}_1)_\mu \underline{b}_1^\mu} e^{i(R' U'_2 \underline{l}_2)_\mu \underline{b}_2^\mu}$$

Wir führen nun die gleichen Rechenschritte durch, die auch in Gleichung (2.4.12) resultieren und erhalten:

$$\mathcal{I}(t_1, t_2, \underline{l}_1, \underline{l}_2) = (2\pi)^{12} e^{-\frac{1}{2} |(I' - P') U'_1 \underline{l}_1|^2} e^{-\frac{1}{2} |(I' - P') U'_2 \underline{l}_2|^2} \quad (\text{A.1.3}) \\ \times \int_{\mathbb{R}^6} d\beta_1 d\beta_2 e^{i \sum_{i=1}^3 (V'_{\underline{e}_4} R' U'_1 \underline{l}_1)_i \beta_1^i} e^{i \sum_{i=1}^3 (V'_{\underline{e}_4} R' U'_2 \underline{l}_2)_i \beta_2^i} \\ \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} d\beta_1^0 d\beta_2^0 \theta(t_2 - \beta_2^0) \theta(\beta_2^0 - \beta_1^0) \theta(\beta_1^0 - t_1) e^{i(V'_{\underline{e}_4} R' U'_1 \underline{l}_1)_0 \beta_1^0} e^{i(V'_{\underline{e}_4} R' U'_2 \underline{l}_2)_0 \beta_2^0}}_{=:\mathcal{J}}$$

An dieser Stelle bietet es sich an, die Impulsumentenennung wieder rückgängig zu machen. Um die Integrationen über die Zeiten vollziehen zu können nutzen wir die Beziehung $\theta(\tau) = 1/(2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} dp (p - i\epsilon)^{-1} e^{ip\tau}$ für die Stufenfunktion:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(p_1 - i\epsilon_1)(p_2 - i\epsilon_2)(p_3 - i\epsilon_3)} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta_1^0 d\beta_2^0 \\ \times e^{ip_1(t_2 - \beta_2^0)} e^{ip_2(\beta_2^0 - \beta_1^0)} e^{ip_3(\beta_1^0 - t_1)} \\ \times e^{i(-q_1^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)\beta_1^0} e^{i(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)\beta_2^0}$$

Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit:

$$\mathcal{J} = \frac{i}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dp_1 dp_2 dp_3 e^{ip_1 t_2} e^{-ip_3 t_1}}{(p_1 - i\epsilon_1)(p_2 - i\epsilon_2)(p_3 - i\epsilon_3)} \delta(p_3 - (p_2 - (-q_1^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0))) \\ \times \delta(p_2 - (p_1 - (q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)))$$

Die Integrationen über die Deltafunktionen lassen sich nun auswerten:

$$\mathcal{J} = \frac{i}{4\pi^2} e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} \int_{\mathbb{R}} dp_1 \frac{e^{ip_1(t_2 - t_1)}}{(p_1 - i\epsilon_1)(p_1 - (q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0 + i\epsilon_2))(p_1 - (q_2^0 - q_1^0 + i\epsilon_3))}$$

Dieses Integral besitzt drei Polstellen erster Ordnung in der oberen komplexen Halbebene, wobei der Integrationsweg für $t_2 > t_1$ einem Halbkreis entspricht, der die Polstellen umschließt (für $t_2 < t_1$ ist $\mathcal{J} = 0$). Mit Hilfe des Residuensatzes erhält man somit

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = \frac{-e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1}}{2\pi} \sum \text{Res.}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = \frac{1}{2\pi} \left[\right. & - \frac{e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} e^{i(q_2^0 - q_1^0)(t_2 - t_1)}}{(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(q_2^0 - q_1^0)} \\ & + \frac{e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} e^{i(-q_1^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)t_1} e^{(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)t_2}}{(q_2^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(-q_1^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)} \\ & \left. - \frac{e^{i(q_2^0 - q_1^0)t_1} e^{i(q_2^0 - q_1^0)(t_2 - t_1)}}{(q_1^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(q_2^0 - q_1^0)} \right] \end{aligned}$$

und bekommt mit der Identität $q_i^0 = \sqrt{\mathbf{q}_i^2 + m^2}$

$$\mathcal{J}(t_1, t_2, q_1^0, q_1^0, k_1^0, k_1^0, k_2^0, k_2^0, k_3^0) \rightarrow \mathcal{J}(t_1, t_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t_1, t_2, q_1, q_2, k_1, k_2, k_3) &= (2\pi)^{15} \left\{ e^{-\frac{1}{32}|3q_1 - k_1 - k_2 - k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + q_1 - k_2 - k_3|^2} \dots \right\} \\ &\times \left\{ e^{-\frac{1}{32}|3q_2 + k_1 + k_2 + k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + q_2 - k_2 - k_3|^2} \dots \right\} \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) \\ &\times \mathcal{J}(t_1, t_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad . \end{aligned}$$

Wir schreiben nun (A.1.1) als

$$\gamma_1 = \tilde{c} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}_3}} \tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3)$$

wobei nun das Problem darin liegt, $\tilde{\mathcal{I}}$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) &:= (2\pi)^{15} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2}} e^{iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2} \times \left\{ \right. \\
&\quad \times \left\{ e^{-\frac{1}{32}|3q_1 - k_1 - k_2 - k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + q_1 - k_2 - k_3|^2} \dots \right\} \\
&\quad \times \left\{ e^{-\frac{1}{32}|3q_2 + k_1 + k_2 + k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + q_2 - k_2 - k_3|^2} \dots \right\} \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)) \\
&\quad \times \left. \sum_{i=1}^3 \mathcal{J}_i(t_1, t_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right\}
\end{aligned} \tag{A.1.4}$$

Die Integration über $\mathbf{q}_i$ ist so nicht möglich für die Terme $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_3$, denn wenn wir hier die Deltafunktion ausführen, so ergibt der Nenner identisch Null wegen $(q_2^0 - q_1^0) \rightarrow 0$ also:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) &= -(2\pi)^{14} \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
&\quad \times \left[e^{-\frac{1}{32}|3k - k_1 - k_2 - k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + k - k_2 - k_3|^2} \dots e^{-\frac{1}{32}|3k + k_1 + k_2 + k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1 + k - k_2 - k_3|^2} \dots \right] \\
&\quad \times \left[\underbrace{\frac{1}{(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(0)}}_{\text{nicht definiert}} + \frac{e^{i(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(t_2 - t_1)}}{(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)^2} + \underbrace{\frac{1}{(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)(0)}}_{\text{nicht definiert}} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{A.1.5}$$

mit $k = (k^0, \mathbf{k}) := (\sqrt{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2 + m^2}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$.

Um dieses Problem zu vermeiden setzen wir erneut an und gehen zurück zu Formel (A.1). Dort beziehen wir die Kopplungskonstante λ in die Integration mithilfe der Transformation $\lambda \rightarrow \lambda_\rho(t)$ ein und fordern, dass $\lambda_\rho(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_\rho(t) = \lambda_0 \mathbb{1} = \lambda$. Eine konkrete Wahl ist

$$\lambda_\rho(t) := e^{-\frac{t^2}{2\rho}}$$

so, dass

$$\delta(x - y) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dt e^{-\frac{t^2}{2\rho}} e^{i(x-y)t} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho}{2}(x-y)^2}$$

d.h. im Limes erhalten wir somit (A.1.5) zurück. Wir setzen also die Gaußfunktionen $\lambda_{\rho_{1,2}}(t)$ in die Formel ein und führen die ganze Prozedur erneut durch. Indem wir schließlich die räumlichen Deltafunktionen in (A.1.3) ausführen, bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) = & -(2\pi)^{15} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
& \times \left[e^{-\frac{1}{32}|3k-k_1-k_2-k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots e^{-\frac{1}{32}|3k+k_1+k_2+k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots \right] \quad (\text{A.1.6}) \\
& \times \lim_{\rho_{1,2} \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(p_1 - i\epsilon)(p_2 - i\epsilon)(p_3 - i\epsilon)} e^{ip_1 t_2} e^{-ip_3 t_1} \times \int_{\mathbb{R}^2} d\beta_1^0 d\beta_2^0 e^{-\frac{(\beta_1^0)^2}{2\rho_1}} e^{-\frac{(\beta_2^0)^2}{2\rho_2}} \right. \\
& \left. \left. \times e^{i(p_3 - (p_2 - (-k^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)))\beta_1^0} e^{i(p_2 - (p_1 - (k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)))\beta_2^0} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Mit k wie oben definiert. Nun genügt es hier nur eine Zeitkomponente zur regularisieren, d.h. wir führen einen Limes bereits jetzt durch (z.B. über ρ_1)

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) = & -(2\pi)^{15} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
& \times \left[e^{-\frac{1}{32}|3k-k_1-k_2-k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots e^{-\frac{1}{32}|3k+k_1+k_2+k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots \right] \\
& \times \lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi i)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(p_1 - i\epsilon)(p_2 - i\epsilon)(p_3 - i\epsilon)} e^{ip_1 t_2} e^{-ip_3 t_1} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta_2^0 e^{-\frac{(\beta_2^0)^2}{2\rho_2}} \right. \\
& \left. \times \delta(p_3 - (p_2 - (-k^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0))) e^{i(p_2 - (p_1 - (k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)))\beta_2^0} \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

so dass über p_3 integriert werden kann:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) = & -(2\pi)^{15} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
& \times \left[e^{-\frac{1}{32}|3k-k_1-k_2-k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots e^{-\frac{1}{32}|3k+k_1+k_2+k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots \right] \\
& \times \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{2\pi\rho}}{(2\pi i)^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_1}{(p_1 - i\epsilon)} \int_{\mathbb{R}} dp_2 \frac{e^{-ip_2 t_1} e^{i(-k^0 + k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)t_1} e^{-\frac{\rho}{2}(p_2 - p_1 + k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0)^2}}{(p_2 - i\epsilon)(p_2 + k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0 - i\epsilon)} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Anwenden des Residuensatzes führt letztendlich zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2, k_3) &= -(2\pi)^{14} \frac{\sqrt{2\pi}}{(2\pi i)} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
&\times \left[e^{-\frac{1}{32}|3k-k_1-k_2-k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots e^{-\frac{1}{32}|3k+k_1+k_2+k_3|^2} e^{-\frac{1}{32}|3k_1+k-k_2-k_3|^2} \dots \right] \\
&\times \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left[\frac{e^{i(-k^0+k_1^0+k_2^0+k_3^0)t_1} e^{-\frac{\rho}{2}(k^0-k_1^0-k_2^0-k_3^0)^2}}{(k^0-k_1^0-k_2^0-k_3^0)} - \frac{e^{i2(-k^0+k_1^0+k_2^0+k_3^0)t_1}}{(k^0-k_1^0-k_2^0-k_3^0)} \right] \left. \right\} \quad (\text{A.1.7})
\end{aligned}$$

Im Limes $\rho \rightarrow \infty$ geht der erste Term gegen Null, der zweite aber wächst $\propto \sqrt{\rho}$. Es sei bemerkt, dass der Nenner hier niemals Null ergeben kann für $m \neq 0$, was zuvor problematisch war (für $m \rightarrow 0$ geht auch der Nenner gegen Null). Es gilt die Abschätzung $k^0 < k_1^0 + k_2^0 + k_3^0$ also $(k^0 - k_1^0 - k_2^0 - k_3^0) = -|k_1^0 + k_2^0 + k_3^0 - k^0|$. Der Nenner geht aber asymptotisch gegen Null für große Impulse. Das wird aber durch die Gaußfunktionen reguliert. Die restlichen Terme aus (3.1.3) berechnen sich analog.

A.2 Der erste Selbstenergiebeitrag der $\phi_R^{(3)}$ -Theorie

Der sogenannte Fishgraph der ϕ^3 -Theorie ist nun leicht aus den obigen Rechnungen anzugeben. Anstatt Formel A.1.4 bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2) &:= (2\pi)^{11} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2}} e^{iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2} \times \left\{ \right. \\
&\times \left\{ e^{-\frac{1}{18}|2q_1-k_1-k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|3k_1+q_1-k_2|^2} \dots \right\} \\
&\times \left\{ e^{-\frac{1}{18}|2q_2+k_1+k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1+q_2-k_2|^2} \dots \right\} \\
&\times \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \delta^{(3)}(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \\
&\times \frac{1}{2\pi} \left[- \frac{e^{i(q_2^0-q_1^0)t_1} e^{i(q_2^0-q_1^0)(t_2-t_1)}}{(q_2^0-k_1^0-k_2^0)(q_2^0-q_1^0)} \right. \\
&\quad + \frac{e^{i(q_2^0-q_1^0)t_1} e^{i(-q_1^0+k_1^0+k_2^0)t_1} e^{(q_2^0-k_1^0-k_2^0)t_2}}{(q_2^0-k_1^0-k_2^0)(-q_1^0+k_1^0+k_2^0)} \\
&\quad \left. - \frac{e^{i(q_2^0-q_1^0)t_1} e^{i(q_2^0-q_1^0)(t_2-t_1)}}{(q_1^0-k_1^0-k_2^0)(q_2^0-q_1^0)} \right] \left. \right\} \quad (\text{A.2.1})
\end{aligned}$$

mit $\tilde{c} = c_{3,1}c_3, 2i^4/(18(2\pi)^{12}) \cdot 1/(3!3!3^4i^4)$ und Formel (A.1.7) wird dann ebenfalls zu

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{I}}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, k_1, k_2) = & -(2\pi)^{10} \sqrt{2\pi} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \times \left\{ \right. \\
 & \times \left[e^{-\frac{1}{18}|2k-k_1-k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1+k-k_2|^2} \dots e^{-\frac{1}{18}|2k+k_1+k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1+k-k_2|^2} \dots \right] \\
 & \times \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left[\frac{e^{i(-k^0+k_1^0+k_2^0)t_1} e^{-\frac{\rho}{2}(k^0-k_1^0-k_2^0)^2}}{(k^0-k_1^0-k_2^0)} - \frac{e^{i2(-k^0+k_1^0+k_2^0)t_1}}{(k^0-k_1^0-k_2^0)} \right] \left. \right\} \quad (\text{A.2.2})
 \end{aligned}$$

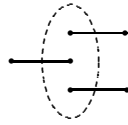
beziehungsweise mit $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tilde{c}} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 e^{ik(x_1-x_2)}}{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2} \omega_{\mathbf{k}}^2} \left\{ \right. \\
 & \times \left[e^{-\frac{1}{18}|2k-k_1-k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1+k-k_2|^2} \dots e^{-\frac{1}{18}|2k+k_1+k_2|^2} e^{-\frac{1}{18}|2k_1+k-k_2|^2} \dots \right] \\
 & \times \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left[\frac{e^{i(-\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_2})t_1} e^{-\frac{\rho}{2}(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2})^2}}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2})} - \frac{e^{i2(-\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_2})t_1}}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2})} \right] \left. \right\} \quad (\text{A.2.3})
 \end{aligned}$$

Die Diskussion über die Divergenzen, die bereits mit den ϕ^4 -Termen betrieben wurde gilt hier ebenfalls.

A.3 Der einfachste Graph ohne innere Linien in der $\phi_R^{(3)}$ -Theorie

Wir berechnen nun den einfachsten Graphen ohne innere Linien in der $\phi_R^{(3)}$ -Theorie: mit den Feynmanregeln aus Bemerkung 2.5.1 bekommen wir für den Graphen $\tilde{\Gamma}$;



folgendes Integral indem wir $\lambda(y) \equiv \lambda \equiv \text{konstant}$ setzen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma} = & \frac{c_3}{3!3^4} \int_{\mathbb{R}^{16}} d\mathbf{a} d\mathbf{y} \delta^{(4)}(y - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i) e^{-\frac{1}{2}|y-\mathbf{a}|^2} \left\{ \right. \\
 & \times \frac{1}{i} \left[\Delta_+(x_1 - a_1) \theta(t_1 - y^0) + \Delta_+(a_1 - x_1) \theta(y^0 - a_1) \right] \\
 & \times \frac{1}{i} \left[\Delta_+(a_2 - x_2) \theta(y^0 - t_2) + \Delta_+(x_2 - a_2) \theta(t_2 - a_2) \right] \\
 & \times \frac{1}{i} \left[\Delta_+(a_3 - x_3) \theta(y^0 - t_3) + \Delta_+(x_3 - a_3) \theta(t_3 - a_3) \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Die Kombinatorik behandeln wir wie oben und berechnen zunächst den ersten Summanden:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^{16}} d\underline{a} dy \quad & \delta^{(4)}(y - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 a_i) e^{-\frac{1}{2}|y-\underline{a}|^2} \theta(t_1 - y^0) \theta(y^0 - t_2) \theta(y^0 - t_3) \\ & \times \Delta_+(x_1 - a_1) \Delta_+(a_2 - x_2) \Delta_+(a_3 - x_3)\end{aligned}$$

Wir führen nun die Integration über die Deltafunktion aus und schreiben die Propagatoren in der Impulsdarstellung:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)} \\ \times \int_{\mathbb{R}^{16}} d\underline{a} \theta(t_1 - \kappa^0(\underline{a})) \theta(\kappa^0(\underline{a}) - t_2) \theta(\kappa^0(\underline{a}) - t_3) e^{-\frac{1}{2}|\underline{a} - \kappa(\underline{a})|^2} e^{i(q_1 a_1 - q_2 a_2 - q_3 a_3)}\end{aligned}$$

Um nun die Techniken aus Kapitel 2 anzuwenden, setzen wir

$$U' \underline{q} := \begin{pmatrix} +I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Damit bekommt man

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)} \\ \times \int_{\mathbb{R}^{16}} d\underline{a} \theta(t_1 - \kappa^0(\underline{a})) \theta(\kappa^0(\underline{a}) - t_2) \theta(\kappa^0(\underline{a}) - t_3) e^{-\frac{1}{2}|(I'-P')\underline{a}|^2} e^{i q_\mu (U' \underline{a})^\mu}\end{aligned}$$

Die Koordinatentransformation $\underline{b} = R' \underline{a}$ mit der orthogonalen 12×12 -Matrix wie oben macht die Gaußfunktion wieder unabhängig von einer Integrationsvariablen:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)} \\ \times \int_{\mathbb{R}^{16}} d\underline{b} \theta(t_1 - b_3^0) \theta(b_3^0 - t_2) \theta(b_3^0 - t_3) e^{-\frac{1}{2}|(I'-E')\underline{b}|^2} e^{i(R' U' \underline{q})_\mu \underline{b}^\mu}\end{aligned}$$

Nun führen wir die gleichen Rechenschritte durch, die in 2.4.12 resultieren und bekommen ($b_3 \equiv \beta$):

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)} \\ \times e^{-\frac{1}{2}|\underline{q} - \kappa(\underline{q})|^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\beta e^{i \sum_{i=1}^3 (V'_{\underline{\epsilon}3} R' U' \underline{q})_i \beta^i} \\ \times \int d\beta^0 \theta(t_1 - \beta^0) \theta(\beta^0 - t_2) \theta(\beta^0 - t_3) e^{i(V'_{\underline{\epsilon}3} R' U' \underline{q})_0 \beta^0}\end{aligned}$$

Das räumliche Integral lässt sich nun in eine Deltafunktion umschreiben und für die The-
tafunktionen wählen wir die Darstellung im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)} e^{-\frac{1}{2}|\underline{q} - \kappa(\underline{q})|^2} \delta^{(3)}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \left\{ \right. \\ & \times \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(p_1 - i\epsilon)(p_2 - i\epsilon)(p_3 - i\epsilon)} \underbrace{\int d\beta e^{-(t_1 - b^0)} e^{i(\beta^0 - t_2)} e^{i(b^0 - t_3)} e^{i(q_1 - q_2 - q_3)_0 \beta^0}}_{= e^{ip_1 t_1} e^{-ip_2 t_2} e^{-ip_3 t_3} \sqrt{2\pi} \delta(p_3 - (p_1 - p_2 - q_1^0 + q_2^0 + q_3^0))} \left. \right\} \end{aligned}$$

Die Deltafunktion kann nun ausgeführt werden und wir erhalten für das letzte Integral:

$$\frac{i}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dp_1 dp_2}{(p_1 - i\epsilon)(p_2 - i\epsilon)} \frac{e^{ip_1 t_1} e^{-ip_2 t_2} e^{i(p_1 - p_2 - q_1 + q_2 + q_3)t_3}}{(p_1 - p_2 - q_1 + q_2 + q_3) - i\epsilon}$$

Anwenden des Residuensatzes ergibt dann schließlich mit $q^0 = \omega_{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & \frac{c_3}{3!3^4 i^3 6} \int_{\mathbb{R}^9} \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{\omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3}} e^{-i(q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)} e^{-\frac{1}{2}|\underline{q} - \kappa(\underline{q})|^2} \\ & \frac{i}{(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})} \left[e^{i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_3} - e^{-i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_1} \right. \\ & \left. - e^{i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_2} - e^{i(-\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} + \omega_{\mathbf{q}_3})t_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

Dieses Integral ist offensichtlich endlich und die weiteren Terme berechnen sich analog.

Anhang B

Beitrag zur Selbstenergie aus quantenmechanischer Sicht

B.1 Die Vakuumkorrektur

In diesem Abschnitt berechnen wir explizit die Korrektur zum Vakuumzustand in der $\phi_R^{(3)}$ -Theorie. Ausgehend von Gleichung (3.1.9)

$$\langle 0 | H_I^\lambda H_0^{-1} H_I^\lambda | 0 \rangle = \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \left[\int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \langle 0 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | 0 \rangle \right],$$

berechnen wir:

$$\int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \langle 0 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{3!}} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \\ &\quad \times \langle 0 | : \phi(a_{11}) \phi(a_{21}) \phi(a_{31}) : a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ a_{\mathbf{p}_3}^+ | 0 \rangle \\ &= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{3!}} \sum_{\pi} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \left\{ \right. \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_3}{\sqrt{\omega_{\mathbf{l}_1} \omega_{\mathbf{l}_2} \omega_{\mathbf{l}_3}}} e^{-i\mathbf{l}_\mu \mathbf{a}_1^\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{p}_{\pi(1)}) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_2 - \mathbf{p}_{\pi(2)}) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_3 - \mathbf{p}_{\pi(3)}) \left. \right\} \\ &= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\pi} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \left\{ \right. \\ &\quad \times \frac{e^{-ip_{\pi(1)} a_{11}} e^{-ip_{\pi(2)} a_{21}} e^{-ip_{\pi(3)} a_{31}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}}} \left. \right\} \end{aligned}$$

Analog dazu bekommt man:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \langle p_1 p_2 p_3 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | 0 \rangle = \\
&= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{3!}} \int d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_2^0)) \\
&\quad \times \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_3} : \phi(a_{12}) \phi(a_{22}) \phi(a_{32}) : | 0 \rangle \\
&= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\sigma} \int d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_2^0)) \left\{ \right. \\
&\quad \times \left. \frac{e^{ip_{\sigma(1)}a_{12}} e^{ip_{\sigma(2)}a_{22}} e^{ip_{\sigma(3)}a_{32}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}}} \right\}
\end{aligned}$$

Nun folgen die üblichen Rechenschritte, um die Gaußfunktionen unabhängig von einer der Integrationsvariablen zu machen. Zunächst schreiben wir die Impulse um:

$$U'_1 \mathbf{k}_1 := \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\pi(1)} \\ p_{\pi(2)} \\ p_{\pi(3)} \end{pmatrix}, \quad U'_2 \mathbf{k}_2 := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\sigma(1)} \\ p_{\sigma(2)} \\ p_{\sigma(3)} \end{pmatrix}$$

Damit haben wir zu berechnen:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{i\mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1} e^{i\mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{a}_2} \\
&\quad \times \int d\mathbf{a}_1^0 d\mathbf{a}_2^0 e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_2^0)) e^{iU_1 \mathbf{k}_1^0 \mathbf{a}_1^0} e^{iU_2 \mathbf{k}_2^0 \mathbf{a}_2^0}
\end{aligned}$$

Mit den Techniken aus Kapitel 2 folgt für diesen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^6 e^{-\frac{1}{2}|(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2|^2} \\
&\quad \times \int d\beta_1 d\beta_2 \lambda(\beta_1/\sqrt{3}) \lambda(\beta_2/\sqrt{3}) e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1) \cdot \beta_1} e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2) \cdot \beta_2} \\
&\quad \times \int d\mathbf{b}_1^0 d\mathbf{b}_2^0 e^{-\frac{1}{2}(|\mathbf{b}_1^0|^2)} e^{-\frac{1}{2}(|\mathbf{b}_2^0|^2)} \delta\left(\frac{b_{31}^0}{\sqrt{3}}\right) \delta\left(\frac{b_{32}^0}{\sqrt{3}}\right) e^{i(RU_1 \mathbf{k}_1^0) \mathbf{b}_1^0} e^{i(RU_2 \mathbf{k}_2^0) \mathbf{b}_2^0}
\end{aligned}$$

Jetzt führen wir noch die zeitliche Integration über vier Variablen b_{11}^0 , b_{21} , b_{12} , b_{22} und setzen $\beta_i = b_{3i}$:

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^6 e^{-\frac{1}{2}|(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2|^2} \\
&\quad \times \int d\beta_1 d\beta_2 \lambda(\beta_1/\sqrt{3}) \lambda(\beta_2/\sqrt{3}) e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1) \cdot \beta_1} e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2) \cdot \beta_2} \\
&\quad \times (2\pi)^2 e^{-\frac{1}{2}|(I-P)U_1 \mathbf{k}_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|(I-P)U_2 \mathbf{k}_2^0|^2} \\
&\quad \times \underbrace{\int d\beta_1^0 d\beta_2^0 e^{-\frac{1}{2}|\beta_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta_2^0|^2} \delta\left(\frac{\beta_1^0}{\sqrt{3}}\right) \delta\left(\frac{\beta_2^0}{\sqrt{3}}\right) e^{i(V_{\varepsilon_3} R U_1 \mathbf{k}_1^0) \beta_1^0} e^{i(V_{\varepsilon_3} R U_2 \mathbf{k}_2^0) \beta_2^0}}_{=3}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir mit der Beziehung $V_{\underline{e}_n} RU_1 \underline{k}_1^\mu = \underline{\xi} \cdot (U_1 \underline{k}^\mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n u_{i1} k_{i1}^\mu$:

$$\begin{aligned} \tilde{c} \sum_{\pi, \sigma} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} & |\lambda(\frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3))|^2 \\ & \times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_{\pi(1)} - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_{\pi(1)} + \mathbf{p}_{\pi(2)} + \mathbf{p}_{\pi(3)})|^2} \dots e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_{\pi(3)} - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_{\pi(1)} + \mathbf{p}_{\pi(2)} + \mathbf{p}_{\pi(3)})|^2} \\ & \times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_{\sigma(1)} - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_{\sigma(1)} + \mathbf{p}_{\sigma(2)} + \mathbf{p}_{\sigma(3)})|^2} \dots e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_{\sigma(3)} - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_{\sigma(1)} + \mathbf{p}_{\sigma(2)} + \mathbf{p}_{\sigma(3)})|^2} \\ & \times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_{\pi(1)}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_{\pi(1)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\pi(2)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\pi(3)}})|^2} \dots e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_{\pi(3)}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_{\pi(1)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\pi(2)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\pi(3)}})|^2} \\ & \times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_{\sigma(1)}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_{\sigma(1)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(2)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(3)}})|^2} \dots e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_{\sigma(3)}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_{\sigma(1)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(2)}} + \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(3)}})|^2} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\tilde{c} := \frac{c_3^2}{3!^2} \frac{1}{3!} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{3(2\pi)^8}{3^8 8}$. Die Summanden ergeben nun für jede Permutation denselben Wert. Wir bekommen daher folgendes Integral ($c_n = n^2(2\pi)^{-2(n-1)}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^4} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} & |\lambda(\frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3))|^2 \\ & \times e^{-|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} \\ & \times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_3} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

B.2 Die Einteilchenkorrektur

Ausgehend von Gleichung (3.1.11) berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle q' | H_I^\lambda (H_0 - \omega_{\mathbf{q}})^{-1} H_I | q \rangle &= \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle q' | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 \rangle \langle p_1 p_2 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | q \rangle \\ &+ \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle q' | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 p_4 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | q \rangle \end{aligned}$$

Zunächst wird der erste Summand berechnet:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \langle q' | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 \rangle &= \\ &= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa(\mathbf{a}_1^0)) \langle 0 | a_{\mathbf{q}} : \phi(a_{11}) \phi(a_{21}) \phi(a_{31}) : a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ | 0 \rangle \\ &= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{2!}} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\pi} \int d\mathbf{a}_1 e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa(\mathbf{a}_1^0)) \left\{ \int \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_3}{\sqrt{\omega_{\mathbf{l}_1} \omega_{\mathbf{l}_2} \omega_{\mathbf{l}_3}}} \right. \\ &\quad \times e^{-il_{1\mu} a_{11}^\mu} e^{-il_{2\mu} a_{21}^\mu} e^{+il_{3\mu} a_{31}^\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{l}_{\pi(3)}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{l}_{\pi(2)}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{l}_{\pi(1)}) \Big\} \\ &= \frac{c_3}{\sqrt{2!} \sqrt{8} (2\pi)^{9/2} 3^4} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa(\mathbf{a}_1^0)) \\ &\quad \times \frac{e^{-ip_1 a_{11}} e^{-ip_2 a_{21}} e^{+iq' a_{31}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{q}'}}} \end{aligned}$$

und analog dazu

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \langle p_1 p_2 | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{y}) : | q \rangle = \\
&= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2^0)) \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2} : \phi(a_{12}) \phi(a_{22}) \phi(a_{32}) : a_{\mathbf{q}}^+ | 0 \rangle \\
&= \frac{c_3}{\sqrt{2!} \sqrt{8} (2\pi)^{9/2} 3^4} \int d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2^0)) \\
&\quad \times \frac{e^{+ip_1 a_{11}} e^{+ip_2 a_{21}} e^{-iq' a_{31}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{q}}}}
\end{aligned}$$

Die üblichen Transformationen sind:

$$U'_1 \mathbf{k}_1 := \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & +I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q \end{pmatrix}, \quad U'_2 \mathbf{k}_2 := \begin{pmatrix} +I & 0 & 0 \\ 0 & +I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q \end{pmatrix}$$

Damit haben wir wie immer:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{i\mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1} e^{i\mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{a}_2} \\
& \quad \times \int d\mathbf{a}_1^0 d\mathbf{a}_2^0 e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\boldsymbol{\kappa}^0(\mathbf{a}_1^0)) \delta(\boldsymbol{\kappa}^0(\mathbf{a}_2^0)) e^{iU_1 \mathbf{k}_1^0 \mathbf{a}_1^0} e^{iU_2 \mathbf{k}_2^0 \mathbf{a}_2^0}
\end{aligned}$$

Mit den Techniken aus Kapitel 2 folgt wieder:

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^6 e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{I}-\mathbf{P}\mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{I}-\mathbf{P}\mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2|^2} \\
& \quad \times \int d\beta_1 d\beta_2 \lambda(\beta_1/\sqrt{3}) \lambda(\beta_2/\sqrt{3}) e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1) \cdot \beta_1} e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2) \cdot \beta_2} \\
& \quad \times \int d\mathbf{b}_1^0 d\mathbf{b}_2^0 e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{b}_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{b}_2^0|^2} \delta\left(\frac{b_{31}^0}{\sqrt{3}}\right) \delta\left(\frac{b_{32}^0}{\sqrt{3}}\right) e^{i(RU_1 \mathbf{k}_1^0) \mathbf{b}_1^0} e^{i(RU_2 \mathbf{k}_2^0) \mathbf{b}_2^0}
\end{aligned}$$

Jetzt führen wir wieder die zeitliche Integration über vier Variablen b_{11}^0 , b_{21} , b_{12} , b_{22} und setzen $\beta_i = b_{3i}$:

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^6 e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{I}-\mathbf{P}\mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{I}-\mathbf{P}\mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2|^2} \\
& \quad \times \int d\beta_1 d\beta_2 \lambda(\beta_1/\sqrt{3}) \lambda(\beta_2/\sqrt{3}) e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_1 \mathbf{k}_1) \cdot \beta_1} e^{i(\mathbf{V}_{\varepsilon_3} \mathbf{R} \mathbf{U}_2 \mathbf{k}_2) \cdot \beta_2} \\
& \quad \times (2\pi)^2 e^{-|(I-P)U_1 \mathbf{k}_1^0|^2} e^{-|(I-P)U_2 \mathbf{k}_2^0|^2} \\
& \quad \times \underbrace{\int d\beta_1^0 d\beta_2^0 e^{-\frac{1}{2}|\beta_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta_2^0|^2} \delta\left(\frac{\beta_1^0}{\sqrt{3}}\right) \delta\left(\frac{\beta_2^0}{\sqrt{3}}\right) e^{i(V_{\varepsilon_3} R U_1 \mathbf{k}_1^0) \beta_1^0} e^{i(V_{\varepsilon_3} R U_2 \mathbf{k}_2^0) \beta_2^0}}_{=3}
\end{aligned}$$

mit $V_{\underline{e}_n} R U_1 \underline{k}_1^\mu = \underline{\xi} \cdot (U_1 \underline{k}^\mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n u_{ii1} k_{i1}^\mu$ und indem wir den räumlichen Cut-Off $\lambda(\beta/\sqrt{3})$ gegen Eins gehen lassen erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \sqrt{\omega_{\mathbf{q}'} \omega_{\mathbf{q}}}} \\ &\times \delta^{(3)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}')\right) \delta^{(3)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})\right) \\ &\times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}')|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}')|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{q}' - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}')|^2} \\ &\times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{q} - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})|^2} \\ &\times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}'})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}'})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{q}'} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}'})|^2} \\ &\times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\tilde{c} := \frac{c_3}{3!^2} \frac{1}{2!} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{3(2\pi)^8}{3^8 8} (2\pi)^3 3!^2$. Wir führen eine Deltafunktion aus, damit lässt sich der Einteilchenzustand abspalten und wir können unter dem Integral $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$ setzen:

$$\begin{aligned} &= \langle q' | q \rangle \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \\ &\times e^{-|\mathbf{p}_1|^2} e^{-|\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}|^2} e^{-|\mathbf{q}|^2} \\ &\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})|^2} \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

Der zweite Term der Korrektur wird nun ähnlich ermittelt. Zunächst gilt:

$$\int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \langle q | : \phi_R^{(3)}(0, \mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{4!}} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \\ &\times \langle 0 | a_{\mathbf{q}} : \phi(a_{11}) \phi(a_{21}) \phi(a_{31}) : a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ a_{\mathbf{p}_3}^+ a_{\mathbf{p}_4}^+ | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{4!}} \frac{c_3}{(2\pi)^{9/2} 3^4} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\pi} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \left\{ \right. \\ &\times \int \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_3}{\sqrt{\omega_{\mathbf{l}_1} \omega_{\mathbf{l}_2} \omega_{\mathbf{l}_3}}} e^{-i\mathbf{l}_\mu \mathbf{a}^\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{p}_{\pi(1)}) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_2 - \mathbf{p}_{\pi(2)}) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_3 - \mathbf{p}_{\pi(3)}) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\pi(4)}) \left. \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4!}} \frac{c_3}{(2\pi)^{9/2} 3^4} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\pi} \int d\mathbf{a}_1 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \\ &\times \frac{e^{-ip_{\pi(1)} a_{11}} e^{-ip_{\pi(2)} a_{21}} e^{-ip_{\pi(3)} a_{31}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_{\pi(1)}} \omega_{\mathbf{p}_{\pi(2)}} \omega_{\mathbf{p}_{\pi(3)}}}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\pi(4)}) \end{aligned}$$

Analog dazu ist

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \langle p_1 p_2 p_3 p_4 | : \phi_R^{(3)}(x) : | q \rangle \\
&= \frac{c_3}{3^4} \frac{1}{\sqrt{4!}} \int d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_2^0)) \\
&\quad \times \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_3} a_{\mathbf{p}_4} : \phi(a_{12}) \phi(a_{22}) \phi(a_{32}) : a_{\mathbf{q}}^+ | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4!}} \frac{c_3}{(2\pi)^{9/2} 3^4} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\sigma} \int d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_2^0)) \left\{ \right. \\
&\quad \times \left. \frac{e^{ip_{\sigma(1)} a_{12}} e^{ip_{\sigma(2)} a_{22}} e^{ip_{\sigma(3)} a_{32}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}_{\sigma(1)}} \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(2)}} \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(3)}}}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\sigma(4)}) \right\}
\end{aligned}$$

Nun müssen die Terme mit $\pi(4) = \sigma(4)$ von denjenigen unterschieden werden, für die $\pi(4) \neq \sigma(4)$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{c_3^2}{(2\pi)^9 3^8} \frac{1}{8} \frac{1}{4!} \int d\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_2 \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)) \lambda(\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)) e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_1)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2 - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{a}_2)|^2} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_1^0|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{a}_2^0|^2} \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_1^0)) \delta(\kappa^0(\mathbf{a}_2^0)) \\
&\quad \times \left[4!(4! - 3!) \frac{e^{-ip_1 a_{11}} e^{-ip_2 a_{21}} e^{-ip_3 a_{31}} e^{ip_1 a_{12}} e^{ip_2 a_{22}} e^{ip_4 a_{32}}}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}_3} \omega_{\mathbf{p}_4}}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4) \right. \\
&\quad \left. + 4!3! \frac{e^{-ip_1 a_{11}} e^{-ip_2 a_{21}} e^{-ip_3 a_{31}} e^{ip_1 a_{12}} e^{ip_2 a_{22}} e^{ip_3 a_{32}}}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_4) \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4) \right]
\end{aligned}$$

Die Transformation für den ersten Term ist:

$$U'_1 \underline{k}_1 := \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad U'_2 \underline{k}_2 := \begin{pmatrix} +I & 0 & 0 \\ 0 & +I & 0 \\ 0 & 0 & +I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Setzt man die Cut-Off-Funktionen $\lambda(\cdot) \equiv 1$, so lässt sich der erste Term wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_4)}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}_3} \omega_{\mathbf{p}_4}}} \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4) \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)|^2} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_3} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_4})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_4})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_4} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_4})|^2}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\tilde{c} := \frac{3}{3^8 3!^2} \frac{4!(4! - 3!)}{4!} \frac{(2\pi)^8 (2\pi)^{3 \cdot 3}}{(2\pi)^9}$ und indem wir die Integration über $\mathbf{p}_3$ und $\mathbf{p}_4$ durchführen

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}'}} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}')}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \sqrt{\omega_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}'}}} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{q}' - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q})|^2} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}')|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}')|^2} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{q} - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}')|^2} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{q}'} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}'})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}'})|^2} e^{-\frac{1}{2}|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}'})|^2}
\end{aligned}$$

Indem wir nun eine der verbleibenden Deltafunktionen ausführen, kann der Einteilchenzustand abgespalten werden. Unter dem Integral setzt man wieder $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$ und bekommt:

$$\begin{aligned}
&= \langle q' | q \rangle \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{p}_1 \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} e^{-|\mathbf{p}_1|^2} e^{-|\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}|^2} e^{-|\mathbf{q}|^2} \quad (\text{B.2.2}) \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{q}} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})|^2}
\end{aligned}$$

Der verbleibende Term berechnet sich wie folgt. Zunächst definieren wir die Transformation für den zweiten Term :

$$U'_1 \underline{k}_1 := \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad U'_2 \underline{k}_2 := \begin{pmatrix} +I & 0 & 0 \\ 0 & +I & 0 \\ 0 & 0 & +I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{3!^2} \frac{c_3^2 4! 3! (2\pi)^8}{4! 8 (2\pi)^9 3^8} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_4) \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4)}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} \\
&\times e^{-|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_3} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} \\
&\times |\lambda(\frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3))|
\end{aligned}$$

Durch Ausführen einer Deltafunktion kann wieder ein Einteilchenzustand abgespalten werden:

$$\begin{aligned}
&= \langle q' | q \rangle \frac{1}{3^4} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} |\lambda(\frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3))|^2 \quad (\text{B.2.3}) \\
&\times e^{-|\mathbf{p}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_2 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} e^{-|\mathbf{p}_3 - \frac{1}{3}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2} \\
&\times e^{-|\omega_{\mathbf{p}_1} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_2} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2} e^{-|\omega_{\mathbf{p}_3} - \frac{1}{3}(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3})|^2}
\end{aligned}$$

Dieser Term entspricht nun bis auf den Einteilchenzustand dem Vakuum Erwartungswert.

Anhang C

Quantenmechanische Selbstenergie einer gewöhnlichen ϕ^n -Theorie

Hier berechnen wir die Korrekturen von oben in der herkömmlichen Theorie, um genaue Vergleiche mit der regularisierten Theorie durchführen zu können. Die Konventionen der Normierung sind die gleichen wie oben. Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator lautet:

$$H_I^\lambda := \frac{1}{n!} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) : \phi^n(0, \mathbf{x}) :$$

Für den Vakuumzustand berechnet man:

$$\begin{aligned} \langle 0 | H_I H_0^{-1} H_I | 0 \rangle &= \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle 0 | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 | : \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) : | 0 \rangle \end{aligned}$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3!}} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \langle 0 | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ a_{\mathbf{p}_3}^+ | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{3!}(2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \int \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_3}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{l}_1} \omega_{\mathbf{l}_2} \omega_{\mathbf{l}_3}}} e^{-i(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3)\mathbf{x}} \\ &\times \sum_{\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{p}_{\pi(1)}) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_2 - \mathbf{p}_{\pi(2)}) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_3 - \mathbf{p}_{\pi(3)}) \\ &= \frac{3!}{\sqrt{3!}(2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \frac{1}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}}} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Analog dazu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3!}} \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_3} : \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) : a_{\mathbf{q}}^+ | 0 \rangle &= \\ &= \frac{3!}{\sqrt{2!}(2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \frac{1}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}}} e^{+i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Man erhält insgesamt:

$$\frac{1}{3!3!^2} \frac{3!^2}{(2\pi)^9} \frac{1}{8} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) e^{+i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\mathbf{y}} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\mathbf{x}}$$

und damit

$$\frac{1}{(2\pi)^9} \frac{1}{54} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{|\check{\lambda}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}}$$

Die Einteilchenkorrektur berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle q' | H_I (H_0 - \omega_{\mathbf{q}})^{-1} H_I | q \rangle &= \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle q' | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : | p_1 p_2 \rangle \langle p_1 p_2 | : \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) : | q \rangle \\ &+ \frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ &\times \langle q' | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 p_4 | : \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) : | q \rangle \end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \langle 0 | a_{\mathbf{q}'} : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ | 0 \rangle &= \\ = \frac{3!}{\sqrt{2!}(2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \frac{1}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{q}'}}} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}')\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Analog dazu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_3} : \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) : a_{\mathbf{q}}^+ | 0 \rangle &= \\ = \frac{3!}{\sqrt{2!}(2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \frac{1}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{q}}}} e^{+i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Man erhält insgesamt:

$$\frac{1}{2!(2\pi)^9} \frac{1}{8} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) e^{+i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})\mathbf{y}} e^{-i(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}')\mathbf{x}}$$

Nun lassen wir $\lambda \rightarrow 1$ gehen und können den Einteilchenzustand abspalten:

$$\frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^9} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{q}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}') \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})$$

Damit bekommt man:

$$\langle q' | q \rangle \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}}$$

Der zweite Term ist etwas aufwändiger. Man hat zu berechnen:

$$\frac{1}{3!^2} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{y}) \\ \times \langle q' | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle \langle p_1 p_2 p_3 p_4 | : \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) : | q \rangle$$

Zunächst ist

$$\int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \langle q' | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : | p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4!} (2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x}) \sum_{\pi} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_{\pi(4)})}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{p}_{\pi(1)}} \omega_{\mathbf{p}_{\pi(2)}} \omega_{\mathbf{p}_{\pi(3)}}}} e^{-i(\mathbf{p}_{\pi(1)} + \mathbf{p}_{\pi(2)} + \mathbf{p}_{\pi(3)}) \cdot \mathbf{x}}$$

Analog dazu:

$$\int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \langle p_1 p_2 p_3 p_4 | : \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) : | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4!} (2\pi)^{9/2}} \int d\mathbf{y} \lambda(\mathbf{y}) \sum_{\sigma} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{\sigma(4)})}{\sqrt{8\omega_{\mathbf{p}_{\sigma(1)}} \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(2)}} \omega_{\mathbf{p}_{\sigma(3)}}}} e^{+i(\mathbf{p}_{\sigma(1)} + \mathbf{p}_{\sigma(2)} + \mathbf{p}_{\sigma(3)}) \cdot \mathbf{x}}$$

Man unterscheidet nun die Terme mit $\pi(4) = \sigma(4)$ von denen mit $\pi(4) \neq \sigma(4)$ und erhält:

$$\frac{1}{3!^2 4!} \frac{1}{(2\pi)^9} \frac{1}{8} \left[4!(4! - 3!)(2\pi)^3 \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \right. \\ \times \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4)}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}_3} \omega_{\mathbf{p}_4}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4) \\ + 4!3! \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3} + \omega_{\mathbf{p}_4} - \omega_{\mathbf{q}}} \\ \left. \times \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_4) \delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}_4)}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} |\lambda(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2 \right]$$

Hierbei haben wir im ersten Term $\lambda \rightarrow 1$ gehen lassen. Das ergibt dann:

$$= \left[\frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{q}'}} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}')}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \sqrt{\omega_{\mathbf{q}'} \omega_{\mathbf{q}}}} \right. \\ \left. + \langle q' | q \rangle \frac{1}{54} \frac{1}{(2\pi)^9} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{|\lambda(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} \right]$$

Damit haben wir den Einteilchenzustand abgespalten:

$$= \langle q' | q \rangle \left[\frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} + \mathbf{q}}} \right. \\ \left. + \frac{1}{54} \frac{1}{(2\pi)^9} \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{|\lambda(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)|^2}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_2} \omega_{\mathbf{p}_3}} \right]$$

Der letzte Term ist nun bis auf den Einteilchenzustand gleich dem Vakuum Erwartungswert.

Wir definieren die Energiekorrektur $\delta E_l(q)$ für die herkömmliche lorentzinvariante Theorie wie folgt:

$$\langle q|q\rangle\delta E_l(\mathbf{q}) := |\langle q| H_I(H_0 - \omega_q)^{-1} H_I |q\rangle - \langle 0| H_I(H_0)^{-1} H_I |0\rangle \langle q|q\rangle|$$

Explizit ausgedrückt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta E_l(\mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

Mit der Transformation $\mathbf{p}_1 \rightarrow -\mathbf{p}_1$ im ersten Term erhält man:

$$\delta E_l(q) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{8} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{\omega_{\mathbf{p}_1} \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}} \frac{\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}}}{(\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \quad (\text{C.0.2})$$

Wir gehen wieder über zu Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \delta E_l(q) &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{8} \frac{1}{(\sqrt{q^2 + m^2})} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{dp \, d\cos\theta \, p^2}{\sqrt{(p^2 + m^2)(p^2 + 2pq\cos\theta + q^2 + m^2)}} \\ &\quad \times \frac{1}{(\sqrt{p^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + 2pq\cos\theta + q^2 + m^2})^2 - (q^2 + m^2)} \end{aligned}$$

Die Massenkorrektur ist nun definiert als $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \delta E_l(q)$ und man erhält aus Gleichung (C.0.1):

$$\delta m_l := \delta E(0) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1} - m} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1}^2 m} + \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1} + m} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1}^2 m}$$

Beziehungsweise:

$$\delta m_l = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{16} \int d\mathbf{p}_1 \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}_1}^2 m} \left[\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}_1} - m} + \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}_1} + m} \right]$$

etwas kompakter:

$$\delta m_l = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{8m} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{p^2 + m^2} (4\mathbf{p}^2 + 3m^2)}$$

Dieses Integral schreibt sich in Kugelkoordinaten ($p \in [0, \infty)$):

$$\delta m_l = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{4m} \int_0^\infty \frac{dp \, p^2}{\sqrt{p^2 + m^2} (4p^2 + 3m^2)} \quad (\text{C.0.3})$$

Literaturverzeichnis

- [1] Karl von Meyenn. *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a.*, volume II. Springer-Verlag:, 1985.
- [2] Hartland S. Snyder. Quantized Space-Time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [3] Volker Schomerus. D-branes and deformation quantization. *JHEP*, 06:030, 1999.
- [4] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, and John E. Roberts. The Quantum Structure of Space-Time at the Planck Scale and Quantum Fields. *Commun. Math. Phys.*, 172:187–220, 1995.
- [5] Sergio Doplicher. Spacetime and Fields, a Quantum Texture. 2001.
- [6] J. Collins. *Renormalization*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1984.
- [7] Shiraz Minwalla, Mark Van Raamsdonk, and Nathan Seiberg. Noncommutative Perturbative Dynamics. *JHEP*, 02:020, 2000.
- [8] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, and G. Piacitelli. Field Theory on Noncommutative Spacetimes: Quasipolar Wick Products. 2004.
- [9] Harald Grosse and Raimar Wulkenhaar. Renormalisation of ϕ^4 Theory on Noncommutative $\mathbb{R}^4$ to all orders. 2004.
- [10] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, and G. Piacitelli. Ultraviolet Finite Quantum Field Theory on Quantum Spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 237:221–241, 2003.
- [11] Dorothea Bahns. Perturbative Methods on the Noncommutative Minkowski Space. DESY-THESIS-2004-004.
- [12] Gherardo Piacitelli. Normal Ordering of Operator Products on Noncommutative Space Time and Quantum Field Theory. Dissertation.
- [13] Gherardo Piacitelli. Non Local Theories: New Rules for old Diagrams. 2004.
- [14] W. Thirring. *Lehrbuch der Mathematischen Physik*, volume III. Springer-Verlag Wien New York, 1979.

- [15] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I-IV. Academic Press Inc., 1975.
- [16] J. M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, and H. Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhäuser Boston , Advanced Texts, 2001.
- [17] Jochen Zahn. Wirkungs- und Lokalitätsprinzip für Nichtkommutative Skalare Felder. *Diplomarbeit*, 2003. DESY-THESIS-2003-041.
- [18] A. Perelomov. *Generalized Coherent States and Their Applications*. Springer-Verlag: Texts an Monographs in Physics, 1986.
- [19] N. N. Bogoljubov and D. V. Sirkov. *Quantenfelder*. Physik-Verlag Weinheim, 1979.
- [20] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, and G. Piacitelli. On the Unitarity Problem in Space/Time Noncommutative Theories. *Phys. Lett.*, B533:178–181, 2002.
- [21] H. Epstein and V. Glaser. The Role of Locality in Perturbation Theory. *Ann. Inst, Henri Poincaré, section Z, Vol. XIX, no.3, 211*, pages 211–295, 1973.
- [22] D. Bahns. Unitary Quantum Field Theory on the Noncommutative Minkowski Space. *Fortsch. Phys.*, 51:658–663, 2003.
- [23] Stefan Denk, Volkmar Putz, Manfred Schweda, and Michael Wohlgenannt. Towards UV Finite Quantum Field Theories from Non-Local Field Operators. *Eur. Phys. J.*, C35:283–292, 2004.
- [24] Stefan Denk and Manfred Schweda. Time Ordered Perturbation Theory for Non-Local Interactions: Applications to NCQFT. *JHEP*, 09:032, 2003.
- [25] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [26] J. Dixmier. *C^* -Algebras*. North-Holland Publishing Company, 1982.

Danksagung

Ich bedanke mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Klaus Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und die freundliche und geduldige Betreuung meiner Diplomarbeit. Desweiteren danke ich Jochen Zahn für die konstruktive Kritik an meiner Arbeit.

Für die angenehme Zeit möchte ich mich bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe sowie den Diplomanden des II. Instituts bedanken.

Für die zahlreichen schönen Stunden und das grenzenlose Verständnis bedanke ich mich bei Mira.

Besonderen Dank gilt meinen Eltern für die kompromisslose moralische und materielle Unterstützung, die mein Studium erst ermöglicht hat.

Erklärung gemäß §21 Abs. (9) Prüfungsordnung/Diplom

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur mit Hilfe der angegebenen Quellen verfasst habe. Desweiteren gestatte ich die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Marcel Kossow, Hamburg 1.11.2004.