

Abgabetermin: 3.11.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Γ -Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty dt t^n e^{-t} \quad (1)$$

a) Zeigen Sie $\Gamma(n+1) = n!$.

Hinweis: Führen Sie $\Gamma(n+1)$ durch geeignetes differenzieren auf $\int_0^\infty dt e^{-at}$ zurück.

b) Zeigen Sie, daß für große n gilt (Stirlingsche Formel)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß der Integrand von $\Gamma(n+1)$ ein scharfes Maximum bei $t = n$ hat und passen Sie dann den Integranden bis zur zweiten Ordnung an die Funktion $Ae^{-\frac{(t-n)^2}{2a^2}}$ an.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Die quantenmechanische Dichtematrix ist definiert durch

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| , \quad \sum_i p_i = 1 , \quad p_i \geq 0 \text{ und reell.}$$

a) Zeigen Sie

$$(i) \rho = \rho^\dagger , \quad (ii) \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle \geq 0 \quad \forall n , \quad (iii) \text{Sp}(\rho) = 1 .$$

b) Zeigen Sie $\langle A \rangle = \text{Sp}(\rho A)$.

c) Zeigen Sie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H] .$$

d) Berechnen Sie $\text{Sp}(\rho^2)$ und zeigen Sie $\text{Sp}(\rho^2) \leq \text{Sp}(\rho)$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Gegeben sein ein 1-dim. klassischer harmonischer Oszillator $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

- a) Welche Bahn beschreibt der Oszillator im Phasenraum wenn die Energie E konstant ist.
- b) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für $H \leq E$ und für $E \leq H \leq E + \Delta$
- c) Bestimmen Sie die mikrokanonische Verteilungsfunktion ρ .
- d) Berechnen Sie damit den Mittelwert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und den Mittelwert der potentiellen Energie $\langle U \rangle$ und zeigen Sie

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2} + \frac{\Delta}{4} .$$